SVAR TILL TENTAMEN
Baskurs i matematik
2008-01-08

1.
   a) Enda lösningen är $x = 1$.
   b) Olikheten gäller om $x < -1$ eller $x > 0$.
   c) medelpunkt: $(-1, 1)$, storaxel 2, lillaxel $\sqrt{2}$.

2. Den enda lösningen är $x = 3$.

3. Olikheten gäller om $-3 < x < -2$ eller $2 < x < 3$.
   (Om vi till att börja med vill bli av med beloppstecknet så får vi att olikheten kan skrivas:
   $$-5 < 2x^2 - 13 < 5 \Leftrightarrow 8 < 2x^2 < 18 \Leftrightarrow 4 < x^2 < 9.$$
   Sedan ser vi att till att börja med
   $$4 < x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) > 0 \Leftrightarrow (x > 2) \vee (x < -2).$$
   Motsvarande för den andra olikheten.)

4. Lösningarna ges av: $\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{n\,\pi}{4}, \quad n\epsilon\mathbf{Z}$.
   (Ekvationen kan skrivas
   $$\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = 0 \Leftrightarrow \cos 4\theta = 0,$$
   där vi använder den välkända formeln för cosinus för dubbla vinkeln. Ur detta följer direkt: $4\theta = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$.)

5. Lösningarna består av punkterna på cirkeln med medelpunkt i $(0, 2/3)$ och radie $4/3$.
   (Sätt $z = x - iy$ vilket ger
   $$|(x - iy) - 2i| = 2|x + iy| \Leftrightarrow |x + i(-y - 2)| = 2|x + iy|.$$
   Men vänsterledet blir $\sqrt{x^2 + (-y-2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$ och högerledet blir $2\sqrt{x^2 + y^2}$. Sedan kvadrerar man bort rottecknen och kvadratkompletterar på vanligt sätt.)

7. Arbetsgruppen kan väljas på 850 olika sätt.
   (Ett sätt är att först räkna ut det totala antalet sätt att välja ut fyra peroner ur 14: det blir $\binom{14}{4} = 1001$ sätt. Från detta tal drar vi till att börja med antalet fall då man valt 4 republikaner: $\binom{8}{4} = 70$ eller 4 demokrater: $\binom{6}{4} = 15$. Slutligen drar vi också bort antalet fall då både Bill och Ronald är valda, dvs. $\binom{12}{2} = 66$ stycken - de övriga

2 kan ju i detta fall väljas godtyckligt bland de återstående 12 personerna. Svaret blir således:

$$1001 - 85 - 15 - 66 = 850.)$$

8. Rötterna är: $-2, 1 \pm i\sqrt{2}$.
(Enklast är att använda sambandet rötter - koefficienter. Vi vet att vi har en rot på formen $1 + iy$, vilket medför - eftersom vi har reella koefficienter - att även $1 - iy$ är en rot. Den tredje roten måste vara reell (varför?), kalla den r. Nu skall rötternas summa vara koefficienten för andragradstermen, dvs. 0, så vi får

$$(1 + iy) + (1 - iy) + r = 0 \Leftrightarrow r = -2.$$

Vidare skall rötternas produkt bli den konstanta termen gånger (-1), så

$$(-2) \cdot (1 + iy) \cdot (1 - iy) = -6 \Leftrightarrow 1 + y^2 = 3 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}.)$$

Gunnar