UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Vera Koponen

PROV I MATEMATIK
Baskurs i matematik
2008-02-12

Skrivtid: 8-13. Tillåtna hjälpmedel: Inga, annat än pennor, radergum och papper (det sista tillhandahålles). *Poängsättning:* Varje (a)-del ger maximalt 3 poäng; varje (b)-del ger maximalt 2 poäng. *Betygsgränser:* För betyg 3 krävs minst 2 poäng på *varje* (a)-del *samt sammanlagt* minst 18 poäng; för betyg 4, skall man ha uppnått kraven för betyg 3 och fått sammanlagt minst 25 poäng; för betyg 5 skall man ha uppnått kraven för betyg 3 och fått sammanlagt minst 32 poäng. *Anmärkningar:* Lösningarna skall innehålla relevanta förklaringar och uträkningar.

1. (a) Formulera vad som skall bevisas i basfallet och i induktionssteget i ett induktionsbevis av påståendet att

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^k} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^n} \quad \text{för alla } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

(b) Bevisa påståendet i (a)-delen med induktion.

2. (a) En liten skola har två klasser, som vi kallar A och B, med vardera 20 studenter. Tre elever från klass A och tre elever från klass B skall väljas till skolans elevråd. På hur många sätt kan detta ske?
(b) Antag att man klipper isär bokstäverna i ANANAS så att en bokstav står på varje pappersbit. Hur många "ord" av längd 6 kan man bilda genom att ordna bitarna på olika sätt *om två* N *inte får stå bredvid varandra.* (Längd 6 innebär att alla bitarna används i orden.)

3. (a) Beskriv mängden av reella tal x löser olikheten $-4x - 2 < \left|3x + 1\right|$.
(b) Beskriv mängden av reella tal x löser olikheten $\left|4x + 2\right| < \left|3x + 1\right|$.
(Mängderna kan beskrivas med olikheter eller med intervall.)

4. (a) Förenkla följande uttryck till ett heltal:

$$5^{(\log_2(8^4) + \log_5(2) - 10)}$$

(b) Lös ekvationen

$$(\log_2 x)\left(3^x - 27^{(\frac{1}{x}+2)}\right) = 0$$

5. (a) Beräkna kvoten och resten då $x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 10x + 10$ divideras med $x^2 - 2x + 2$.
(b) Ekvationen $x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 10x + 10 = 0$ har en rot på formen bi (där b är reellt). Finn alla rötter.

6. (a) Ange ekvationer för cirkeln med radie 5 och centrum i $(-2, 4)$, och för linjen med lutning 5 som passerar igenom punkten $(-2, 4)$.
(b) Skissa kurvan som beskrivs av $9x^2 + 18x + 4y^2 + 16y = 11$.

7. (a) Lös ekvationen $\sin(-x) = \frac{1}{2}$.
(b) Lös ekvationen $3\sin^2(2x) - \cos^2(2x) = 0$.

8. (a) Beräkna produkten och kvoten och ange resultaten på polär form:

$$(-2 + 2\sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) \qquad \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i}$$

(b) Lös ekvationen $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

Lycka till!

LÖSNINGAR ELLER FÖRKLARINGAR

1. (a) I basfallet skall man verifiera att

$$\text{om } n = 0 \text{ så} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^k} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^n}.$$

I induktionssteget skall man visa att

$$\text{om} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^k} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^n} \text{ stämmer, så stämmer även} \quad \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{5^k} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^{n+1}}.$$

(b) Basfall: om $n = 0$ så

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^k} = \frac{1}{5^0} = 1 \quad \text{och} \quad \frac{5}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^n} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^0} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1,$$

så det stämmer för $n = 0$.

Induktionssteg: Antag (som induktionshypotes) att

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^k} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^n}.$$

Då gäller att

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{5^k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^k} + \frac{1}{5^{n+1}} \\
&= \frac{5}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^n} + \frac{1}{5^{n+1}} \quad \text{(enligt induktionshypotesen)} \\
&= \frac{5}{4} - \frac{5}{4 \cdot 5^{n+1}} + \frac{4}{4 \cdot 5^{n+1}} \\
&= \frac{5}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Eftersom basfallet och induktionssteget är klart så följer från induktionsaxiomet att

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^k} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^n} \text{ för alla } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

2. (a) Tre elever från klass A (med 20 elever) kan väljas på $\binom{20}{3}$ sätt. Sedan kan, oberoende av det tidigare valet, tre elever väljas från klass B (med 20 elever) på $\binom{20}{3}$ sätt. Sammantaget kan elevrådet (med tre elever från varje klass) väljas på

$$\binom{20}{3}\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} \cdot \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = (20 \cdot 19 \cdot 3)^2 \text{ sätt.}$$

(b) Antalet "ord" av längd 6 som kan bildas *överhuvudtaget* med bitarna är

$$\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 60.$$

(Vi väljer 3 placeringar bland 6 möjliga för A:na, sedan 2 placeringar bland 3 återstående för de två N:en och sist har vi bara en plats kvar för S:et.) Antalet "ord" där två N står bredvid varandra är

$$\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} \cdot 2 = 20,$$

eftersom "blocket" med två N kan betraktas som ett enda tecken. Antalet ord av längd 6 som kan bildas där två N inte står intill varandra är $60 - 20 = 40$.

3. (a)

$$\begin{aligned}
-4x - 2 < |3x+1| &\Leftrightarrow -4x - 2 < 3x + 1 \text{ eller } 3x + 1 < -(-4x-2) = 4x + 2 \\
&\Leftrightarrow -\frac{3}{7} < x \text{ eller } \; -1 < x \\
&\Leftrightarrow -1 < x \\
&\Leftrightarrow x \text{ tillhör } (-1, \infty).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
|4x+2| < |3x+1| &\Leftrightarrow -|3x+1| < 4x+2 < |3x+1| \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -|3x+1| < 4x+2 \\ 4x+2 < |3x+1| \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} |3x+1| > -4x-2 \\ 4x+2 < |3x+1| \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \text{ enligt (a)-delen} \\ 4x+2 < 3x+1 \text{ eller } 3x+1 < -4x-2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < -1 \text{ eller } x < -\frac{3}{7} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < -\frac{3}{7} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow -1 < x < -\frac{3}{7} \Leftrightarrow x \text{ tillhör } (-1, -\frac{3}{7}).
\end{aligned}$$

OBS! Man kan också lösa såväl (a)- som (b)-delen genom att använda definitionen av absolutbelopp:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ om } a \geq 0, \\ -a \text{ om } a < 0 \end{cases}$$

4. (a)

$$\begin{aligned}
&5^{(\log_2(8^4) + \log_5(2) - 10)} = 5^{(4\log_2(8) + \log_5(2) - 10)} = 5^{(4 \cdot 3 + \log_5(2) - 10)} \\
&= 5^{(2 + \log_5(2))} = 5^2 \cdot 5^{\log_5(2)} = 25 \cdot 2 = 50.
\end{aligned}$$

(b) Vi har

$$(\log_2 x)\Big(3^x - 27^{(\frac{1}{x}+2)}\Big) = 0$$

om och endast om en av faktorerna är noll. Vi har $\log_2 x = 0$ om och endast om $x = 1$, vilket är en lösning. Antag nu att

$$3^x - 27^{(\frac{1}{x}+2)} = 0.$$

Detta ger

$$
\begin{aligned}
3^x &= 27^{(\frac{1}{x}+2)} \\
\Rightarrow \log_3(3^x) &= \log_3\left(27^{(\frac{1}{x}+2)}\right) \\
\Rightarrow x\log_3(3) &= (\frac{1}{x}+2)\log_3 27 \\
\Rightarrow x &= (\frac{1}{x}+2)\cdot 3 \\
\Rightarrow x^2 - 6x - 3 &= 0 \\
\Rightarrow x &= 3 \pm \sqrt{12}
\end{aligned}
$$

Men $3-\sqrt{12} < 0$ så $\log_2(3-\sqrt{12})$ är odefinierat, och därför är lösningarna $x = 1$ och $x = 3+\sqrt{12}$.

5 (a) Jag skriver inte ut själva uträkningen (vilket ni skall ha gjort) men kvoten blir x^2+5 och resten blir 0, så divisionen går jämnt ut.

(b) Men hjälp av ledtråden att en rot har formen bi så kan man byta ut x med bi i ekvationen

$$x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 10x + 10 = 0$$

och sedan "samla ihop" realdelen respektive imaginärdelen. Eftersom båda skall vara noll, så får man två ekvationer som kan användas för att få fram att $b = \pm\sqrt{5}$. Så de två första rötterna är $x = \pm\sqrt{5}i$. Då delas $p(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 10x + 10$ av $(x-\sqrt{5}i)(x+\sqrt{5}i) = (x^2+5)$. Enligt lösningen för (a)-delen så $p(x) = (x^2+5)(x^2-2x+2)$. Detta innebär att de återstående rötterna löser $x^2 - 2x + 2 = 0$, vilket medför att de är $x = 1 \pm i$. Samtliga rötter ges alltså av $x = \sqrt{5}i, -\sqrt{5}i, 1+i, 1-i$. OBS! Eftersom lösningen av (a)-delen ger att $p(x) = (x^2+5)(x^2-2x+2)$ så kan man alternativt (och snabbare) få fram alla rötter genom att lösa de två andragradsekvationerna $x^2+5=0$ och $x^2-2x+2=0$.

6. (a) Cirkeln med radie 5 och centrum i $(-2,4)$ har ekvationen $(x+2)^2+(y-4)^2 = 25$. En linje med lutning 5 har ekvationen $y = 5x+b$ och om den passerar igenom $(-2,4)$ så gäller $4 = 5(-2)+b$, dvs. $b = 14$, så linjens ekvation är $y = 5x+14$.

(b) En begriplig ekvation fås genom kvadratkomplettering:

$$
\begin{aligned}
9x^2 + 18x + 4y^2 + 16y &= 11 \\
\Leftrightarrow 9(x^2+2x) + 4(y^2+4y) &= 11 \\
\Leftrightarrow 9\big((x+1)^2 - 1\big) + 4\big((y+2)^2 - 4\big) &= 11 \\
\Leftrightarrow 9(x+1)^2 + 4(y+2)^2 &= 36 \\
\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} &= 1.
\end{aligned}
$$

Vi ser nu att ekvationen beskriver en ellips med centrum i $(-1,-2)$, vars "radie i sidled" är 2, och vars "radie i höjdled" är 3. (Jag hoppar över skissen.)

7. (a) $\sin(-x) = 1/2 \Leftrightarrow -\sin x = 1/2 \Leftrightarrow \sin x = -1/2$. Betraktelse av en 30-60-90-graders triangeln samt definitionen av sinus visar att på intervallet $[0, 2\pi)$ så är $7\pi/6$ och $11\pi/6$ de enda lösningarna. Därmed ges alla lösningar av $x = 7\pi/6 \pm 2\pi n$, där $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ och av $x = 11\pi/6 \pm 2\pi n$, där $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

(b)

$$\begin{aligned} 3\sin^2(2x) - \cos^2(2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3\frac{\sin^2(2x)}{\cos^2(2x)} &= 1 \\ \Leftrightarrow \tan^2(2x) &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \tan(2x) &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Låt $y = 2x$. Vi löser först $\tan y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Betraktelse av 30-60-90-graders triangeln samt definitionen av tangens visar att $\tan y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ har lösningarna $\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$ på intervallet $[0, 2\pi)$, så alla lösningar ges av $y = \pi/6 \pm \pi n$ och $y = 5\pi/6 \pm \pi n$, där $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Eftersom $x = y/2$ så ges alla lösningar till $3\sin^2(2x) - \cos^2(2x) = 0$ av $x = \pi/12 \pm \pi n/2$ och $x = 5\pi/12 \pm \pi n/2$, där $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

8. (a) Vi har

$$\begin{aligned} (-2+2\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i) &= 4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})\cdot 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) \\ &= 4\cdot 2(\cos(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6})) = 8(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-2+2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i} &= \frac{4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})}{2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})} \\ &= \frac{4}{2}(\cos(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6})) = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

(b) $z^4 = -8+8\sqrt{3}i \Leftrightarrow z^4 = 16(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$. Antag att $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ är en lösning, så

$$r^4(\cos(4\theta) + i\sin(4\theta)) = 16(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$$

det vill säga

$$\begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \text{ där } k = 0,1,2,3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 16^{\frac{1}{4}} = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, \text{ där } k = 0,1,2,3. \end{cases}$$

Rötterna har alltså absolutbeloppet $r = 2$ och argumenten $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}$, så rötterna är

$$\begin{aligned} 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) &= \sqrt{3}+i \\ 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) &= -1+\sqrt{3}i \\ 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{3}) &= -\sqrt{3}-i \\ 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) &= 1-\sqrt{3}i. \end{aligned}$$