Baskurs i matematik 2008-06-09

Lösningsförslag

1. (a) Låt $P(x)$ vara ett påstående om x, där x betecknar ett naturligt tal $(0, 1, 2, \ldots)$.

Induktionsaxiomet säger om följande två punkter stämmer så är $P(x)$ sann för <u>alla</u> naturliga tal x.

- $P(0)$ är sann. ("basfallet")
- Om $P(n)$ är sann så att $P(n+1)$ sann. ("induktions-steget")

1 (b) Basfall: För $n=0$ får vi $VL = 2 - \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^0} = 2-1 = 1$

och $HL = \frac{1}{2^0} = 1$, så det stämmer för $n=0$.

Induktionssteg: Antag att

$$2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} \text{ stämmer.}$$

Vi visar att samma sak stämmer om n byts ut mot $n+1$.

$$2 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k} = 2 - \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \right) =$$

$$2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n+1}} =$$

$\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}$ enligt (induktions-) antagandet ovan

$$= \frac{2-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Så påståendet stämmer även för $n+1$. Enligt induktions-axiomet så följer att

$$2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} \text{ för alla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

2. (a) Eftersom ett B alltid står längst till vänster så har vi

4 val för nästa plats,

sedan 3 val — " ———,

sedan 2 val — " ———, och

sist 1 val för den sista platsen.

Alltså kan $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ $= 24$ olika ord bildas på detta sättet.

2 (b) Betrakta först sifferblocket som ett enda tecken S.

Med tecknen A, B, C, D, E, S kan 6! ord bildas.

Och sedan byts S ut mot det tre siffrorna 1, 2, 3 i vilken ordning som helst, oberoende av var sifferblocket finns.

Detta ger $6! \cdot 3!$ olika "ord".

3 (a) $|2x - 8| \geq 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 8 \geq 4 \\ \text{eller } 2x - 8 \leq -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ \text{eller } x \leq 2 \end{cases}$$

Alternativt: $(-\infty, 2] \cup [6, \infty)$.

3 (b) $\quad x+3 \leq \frac{5}{x-1}$

$$\iff x+3-\frac{5}{x-1} \leq 0$$

$$\iff \frac{(x-1)(x+3)-5}{x-1} \leq 0$$

$$\iff \frac{x^2+2x-8}{x-1} \leq 0$$

$$\iff \frac{(x+4)(x-2)}{x-1} \leq 0$$

Teckentabell:

		-4		1		2	
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{(x+4)(x-2)}{x-1}$	$-$	0	$+$	odef.	$-$	0	$+$

Olikheten är uppfylld om och endast om

$$x \leq -4 \text{ eller } -1 < x \leq 2.$$

Med intervallnotation så ges mängden av lösningar av

$$(-\infty, -4] \cup (-1, 2].$$

4 (a) $$2^{(\log_3(9) + 2 + \log_2(3))}$$

$$= 2^{(2 + 2 + \log_2(3))}$$

$$= 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^{\log_2(3)}$$

$$= 16 \cdot 3 = 48.$$

(b) $2^{x+2} - 8^{\frac{1}{x}} = 0$

$$\iff 2^{x+2} = 8^{\frac{1}{x}}$$

$$\implies \log_2(2^{x+2}) = \log_2(8^{\frac{1}{x}})$$

$$\implies (x+2)\log_2(2) = \frac{1}{x}\log_2(8)$$

$$\implies x+2 = \frac{3}{x}$$

$$\implies x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\implies x = -3 \text{ eller } x = 1.$$

Detta visar att inga andra tal än $x=-3$ och $x=1$ kan vara lösningar. Insättning i ursprungsekvationen visar att de faktiskt är lösningar.

5 (a) Beräkning av kvot och rest:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \\
\hline
x^2 - x & x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 8x \\
 & x^5 - x^4 \\
\hline
 & -2x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 8x \\
 & -2x^4 + 2x^3 \\
\hline
 & 4x^3 - 12x^2 + 8x \\
 & 4x^3 - 4x^2 \\
\hline
 & -8x^2 + 8x \\
 & -8x^2 + 8x \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Kvoten blir $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ och resten 0, så

$$p(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 8x$$
$$= (x^2 - x)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8).$$

5 (b) Eftersom $x^2 - x = x(x-1)$

så är rötterna till $x^2 - x = 0$,

$x = 0$ och $x = 1$.

Övriga rötter till $p(x) = 0$

måste vara rötter till

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$$

(enligt (a)-delen).

Vi har fått ledtråden att bi

är en rot för något reellt b.

Insättning ger

$$b^3 i^3 - 2b^2 i^2 + 4bi - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow -b^3 i + 2b^2 + 4bi - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b - b^3 = 0 \\ 2b^2 - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2.$$

Insättning av $\pm 2i$ visar att dessa

tal är rötter.

Då delas $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ jämnt av polynomet $(x-2i)(x+2i) = x^2+4$.

Divisionen, som överlämnas åt läsaren, visar att

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x^2+4)(x-2),$$

så den sista roten är $x = 2$.

Nu har vi funnit alla fem (enkel) rötterna till 5:e-gradsekvationen $p(x) = 0$:

$$x = 0, 1, 2, \pm 2i.$$

6 (a) Avståndet mellan $(-1,1)$ och $(1,4)$ är

$$\sqrt{(1-(-1))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{13}.$$

Linjens ekvation har formen

$$y = kx + m.$$

I detta fall gäller

$$k = \text{lutningen} = \frac{4-1}{1-(-1)} = \frac{3}{2}$$

så vi får $y = \frac{3}{2}x + m$.

Eftersom linjen i detta fall passerar genom $(-1,1)$ så gäller

$$1 = \frac{3}{2}(-1) + m, \text{ så}$$

$$m = \frac{5}{2}, \text{ och ekvationen}$$

blir $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

6(b) Skärningspunkterna (x, y) måste uppfylla båda ekvationerna, dvs. systemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$$

Substitution av $x^2 = y + 2$ i den övre ekvationen ger

$$y^2 + y = 0$$

$$\Leftrightarrow y(y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ eller } y = -1.$$

Nu ser vi vad vi får för x-värden för respektive y-värde.

$y = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

(enligt den övre ekvationen)

$y=-1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

(enligt den övre ekvationen).

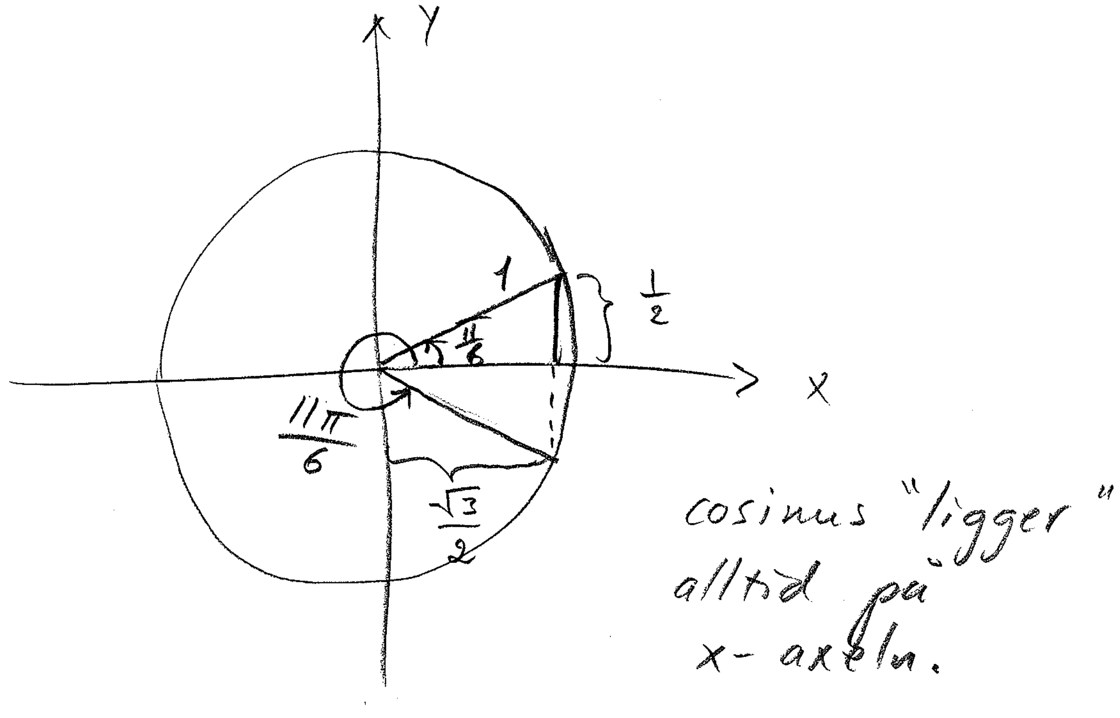
Detta ger oss skärningspunkterna

$(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$

$(1,-1)$, $(-1,-1)$.

7 (a) Låt $y=2x$. Vi löser först $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Betraktelse av 30-60-90-graders-triangeln visar att $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Betraktelse av enhetscirkeln visar att på intervallet $[0, 2\pi)$ så löser $y=\frac{\pi}{6}$ och $y=\frac{11\pi}{6}$ ekvationen $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Samtliga lösningar till $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ges då av

$$y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad , n = \pm 0, 1, 2, \ldots$$

och $y = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n \quad , n = \pm 0, 1, 2, \ldots$

Eftersom $y = 2x$, så ges då samtliga lösningar till $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

av $x = \frac{\pi}{12} + \pi n \quad , n = \pm 0, 1, 2, \ldots$

och $x = \frac{11\pi}{6} + \pi n \quad , n = \pm 0, 1, 2, \ldots$

7 (b) $\quad \sin(6x) + \cos(3x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin(3x)\cos(3x) + \cos(3x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin(3x) = -\frac{1}{2}$

På likaande sätt som i (a)-delen ser man att $\sin(3x) = -\frac{1}{2}$ har lösningarna

$$x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n = \pm 0, 1, 2, \ldots$$

och $\quad x = \frac{11\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n = \pm 0, 1, 2, \ldots$

Detta är också lösningarna till den ursprungliga ekvationen.

8 (a) $\frac{z}{w} =$

$$\frac{6}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3(0+i) = 3i$$

$$w^3 = 2^3\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right) =$$

$$= 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8(0+i)$$

$$= 8i$$

(b) $z^3 = 8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ är en lösning

$$\Leftrightarrow \quad r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) =$$

$$8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm 2\pi k\right)\right)$$

där $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi k \quad , k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} \pm \frac{2\pi k}{3} \quad , k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Det räcker att betrakta $k = 0, 1, 2$, och positivt tecken framför $\frac{2\pi k}{3}$ vilket ger oss

$$\theta_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$\theta_1 = \frac{5\pi}{6}$$

$$\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$$

Detta ger lösningarna

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0 - i) = -2i$$