

## Summor, produkter och induktion

1 Uttryck följande summor med hjälp av summasymbolen  $\sum$

a)  $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23$       b)  $1 - 3 - 7 - 11 - 15 - 19$

c)  $1 + 6 + 11 + 16 + \dots + 101$       d)  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$

e)  $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots$       f)  $\frac{1}{2} - 1 + 2 - 4 + \dots + 32$

2 Uttryck följande summor utan summatecknet  $\sum$

a)  $\sum_{k=1}^4 \frac{k}{k(k+1)}$       b)  $\sum_{p=1}^9 (p^2 - 6p - 2)$

c)  $\sum_{i=4}^8 (i! - (i-1)!)$       d)  $\sum_{n=1}^k \frac{k-n}{n}$       e)  $\sum_{k=3}^7 (p+1)$

3 Beräkna följande produkter

a)  $5! \cdot 1!$       b)  $\prod_{k=2}^4 (1 - \frac{1}{k})$

c)  $\prod_{p=0}^{11} 2$       d)  $\prod_{i=999}^{1111} (-1)^{-i}$       e)  $\frac{101!}{100!}$

4 Skriv talet  $100!$  med produktsymbolen  $\prod$ .

5 a) Bestäm den tolfte termen i serierna

I.  $7 + 4 + 1 - 2 - \dots$

II.  $\sum_{k=2}^n 1024 \cdot (\frac{1}{2})^k$

III.  $3^{23} + 3^{23} \cdot \frac{1}{9} + 3^{23} \cdot \frac{1}{81} + \dots$

IV.  $\sum_{i=0}^{64} \frac{1}{4} \cdot (-2)^i$

b) Beräkna summorna av de 100 första termerna i serien I och de fem första termerna i serien IV.

(var god vänd)

**6** För vilket värde på  $n$  är summan

$$\sum_{k=1}^n 4 \cdot 3^k$$

större än 4000?

**7** Bevisa med induktion att

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

**8 a)** Uttryck summan

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$$

med summatecknet  $\sum$ .

b) Visa med induktion att denna summa är lika med

$$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

**9** Visa med induktion att

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + n \cdot (n+3) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$$

**10** Visa med induktion att

$$\sum_{k=1}^n k^2 < n^3$$

för  $n > 1$ .

**11** Beräkna summan

$$\sum_{j=1}^3 \left( \sum_{i=1}^j \frac{1}{i} \right).$$