

*Tid: . Tentamenstid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. För betyget 3 krävs 18 poäng (av 24) på del A. För betyget 4 krävs 18 poäng på del A och 25 poäng totalt. För betyget 5 krävs 18 poäng på Del A och 32 poäng totalt. Stjärnmärkta uppgifter skall inte göras om man har klarat duggan, ty då har man redan dessa poäng gratis.*

## Del A

1.\* *Inte om du klarat duggan.* Definiera vad som menas med att  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . (2)

2.\* *Inte om du klarat duggan.* Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 2 + 2x + \cos x}{x^2}$$

genom att Maclaurinutveckla de ingående funktionerna. (2)

3.\* *Inte om du klarat duggan.* Derivera

$$f(x) = \arccos \sqrt{1 - x^2},$$

där  $-1 < x < 1$ . (2)

4.\* *Inte om du klarat duggan.* Visa att funktionen

$$g(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

har en global minimipunkt på  $(0, \infty)$ . Bestäm även funktionens värde i denna punkt. (2)

5. Avgör om följande serie är konvergent eller divergent.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}.$$

(2)

6. Följande påståenden är båda *falska*. Ge exempel som visar det.

a) Om  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$  så är serien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent.

b) Om potensserien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  har konvergensradie större än noll, så måste  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ . (2)

7. Definiera vad som menas med att en funktion  $f(x)$  är deriverbar i en punkt  $a$ . (2)

8. Bestäm alla primitiva funktioner till  $f(x) = \frac{1}{x(x+2)}$ . (2)

9. Beräkna integralen  $\int_0^\pi x \cos 2x \, dx$ . (2)

10. Beräkna längden av kurvan  $y = x\sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 4/3$ . (2)

11. Finn den lösning  $y = y(x)$  till  $y' = \frac{y}{1+x^2}$ , som uppfyller  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 1$ . (2)

12. Finn alla lösningar  $y = y(x)$  till differentialekvationen  $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ . (2)

## Del B

13. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \, dx. \quad (4)$$

14. Skissera nedanstående kurva med angivande av stationära punkter och deras typ, konvexitet och asymptoter.

$$y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}. \quad (4)$$

15. En kropp med massan  $m$  faller vertikalt genom luften. Luftmotståndets bromskraft är proportionell mot farten. Ställ upp en differentialekvation för farten  $v = v(t)$  med hjälp av Newtons andra lag  $F = ma$ . Lös ekvationen med utgångshastigheten  $v(0) = V$ . Vad händer med  $v(t)$  då  $t \rightarrow \infty$ ? (4)

16. Låt  $A(a)$  vara den area som begränsas av  $x$ -axeln, kurvan  $y = x^a$  samt dess tangent i punkten där  $x = 1$ . Undersök om funktionen  $A(a)$  har ett största värde för  $a \geq 1$  och bestäm i så fall detta. (4)