UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen

Envariabelanalys
STS, X, X-bio
Ht 2008-vt 2009

Några uppgifter om differentialekvationer

1. Man vet att sönderfallshastigheten för ett radioaktivt ämne är proportionell mot den totala mängden av det kvarvarande radioaktiva ämnet. Proportionalitetskonstanten är specifik för varje ämne.

   Antag att vi vet att halveringstiden för ett visst ämne är 10 år. Efter hur lång tid har 100 g av detta ämne reducerats till 10 g?

2. En infektionssjukdom antas sprida sig i en population med en hastighet som är proportionell mot såväl antalet infekterade som antalet oinfekterade individer. När man upptäckte smittan var en tredjedel av populationen redan smittad. Spridningshastigheten var då så stor att om den förblev konstant, skulle hela populationen vara smittad efter 60 dagar. Hur stor del av befolkningen var faktiskt smittad efter 60 dagar?

3. Bästa dryckstemperaturen för konjak är 29°C (då den som bekant smakar bäst). Konjaken serveras i rumstemperatur (21°C). Hur länge ska man hålla konjakskupan i händerna (kroppstemperaturen är 37°C) innan konjaken är som bäst, om konjakstemperaturen efter 2 minuter har stigit till 25°C. Man vet att konjakens temperaturhöjning per tidsenhet är proportionell mot skillnaden mellan kroppstemperaturen och konjakstemperaturen.

4. En tank innehåller 1000 l saltlösning som innehåller 50 kg salt. Varje minut fyller man på tanken med 10 l av en lösning som innehåller 10 g salt per liter. Samtidigt tappar man av 10 l varje minut av den fullständigt blandade lösningen (så att tanken alltid är full). Hur mycket salt finns i tanken efter 40 minuter?

Översättning till "matematiska"

1. Låt $y(t)$ beteckna mängden (i gram) av det radioaktiva ämnet vid tiden t (räknat i år). Låt vidare $-k$ vara den specifika konstanten för ämnet. Vi vill bestämma t så att $y(t) = 10$, då vi vet att:

$$\begin{cases} y'(t) &= -k \cdot y(t) \\ y(0) &= 100 \\ y(10) &= 50. \end{cases}$$

2. Låt $y(t)$ vara andelen av populationen som är smittad efter tiden t dygn, räknat från upptäckten. Vi vill bestämma $y(60)$, då vi vet att

$$\begin{cases} y'(t) & = & -k \cdot y(t) \cdot (1 - y(t)) \\ y(0) & = & \frac{1}{3} \\ 60 \cdot y'(0) & = & \frac{2}{3}, \end{cases}$$

där k är proportionalitetskonstanten.

3. Låt $T(t)$ vara konjakens temperatur (i °C) efter t minuter. Vi vill bestämma t så att $T(t) = 29$, då vi vet att

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} & = & k \cdot (37 - T(t)) \\ T(0) & = & 21 \\ T(2) & = & 25, \end{cases}$$

där k är en konstant.

4. Låt $x(t)$ vara mängden (mätt i kg) salt i tanken vid tiden t (minuter).
Varje minut tillförs $10 \cdot 10$ g $= 100$ g $= \frac{1}{10}$ kg salt.
Vid tiden t innehåller tanken $x(t)$ kg salt, så varje liter av lösningen innehåller $\frac{x(t)}{1000}$ kg salt. Varje minut avtappas 10 liter, dvs. man tar bort $10 \cdot \frac{x(t)}{1000}$ kg salt.
Förändringen per minut är alltså $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{10} - \frac{x}{100} = \frac{10 - x}{100}$. Vi söker alltså $x(40)$, då vi vet att

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = & \frac{10 - x}{100} \\ x(0) & = & 50 \end{cases}$$

Svar

1. 33 år. $\quad (10\frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 33.)$

2. ca 87%. $\quad (\frac{e^3}{2 + e^3} \approx 0.87.)$

3. ca 5 minuter. $\quad (\frac{\ln 2}{\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3} \approx 5.)$

4. ca 37 kg. $\quad (10 + 40e^{-0.4} \approx 37.)$