

**ÖVNINGSUPPGIFTER, ENVARIABELANALYS. (KAP. 1-4,
ADAMS, 7:E UPPLAGAN)**

- (1) Bestäm gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + \ln x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \arctan(\ln x)}{\sin(x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}.$$

- (2) Bestäm gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + (e^x - 1) \sin(2x)}{x \ln(x + 1)},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x \sin(x)},$$

genom att tex använda Taylors formel och ordo-räkning.

- (3) Derivera funktionerna

$$f(x) = (x^3 + 3x^2)5^x,$$

$$f(x) = x^{x \cos(x^2)}, \quad x > 0,$$

$$f(x) = \cos(x) \sin(x) \tan(x).$$

- (4) Vilka värden på parametrarna a och b gör funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^b, & \text{om } 0 < x \leq 1, \\ 2x^5 + ax, & \text{om } x > 1. \end{cases}$$

kontinuerlig? För vilka värden på a och b är f ovan deriverbar på $(0, \infty)$?

- (5) Visa att funktionen

$$f(x) = (x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x)e^{-x}, \quad x \geq 0$$

har ett globalt minimum och maximum på intervallet $[0, \infty)$. (Du behöver ej hitta dessa max/min punkter; bara visa dess existens)

- (6) Bestäm ekvationen för en linje som passerar origo och skär grafen till $f(x) = 2/x^2$ under rät vinkel. (Det finns två sådana linjer).

- (7) Bestäm alla asymptoter till funktionerna

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 10}{x^2 - 4},$$

$$f(x) = \frac{x^5 + x^3 + 1}{2x^5 + 4}.$$

- (8) Finn alla extrempunkter och inflektionspunkter till funktionen

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$$

Bestäm de intervall där f är växande/avtagande samt är konvex/konkav.
Finn eventuella globala max/min.

- (9) Om vi ändrar på definitionsmängden och låter

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x, \quad -10 \leq x \leq 10.$$

Finn alla extrempunkter och inflektionspunkter till funktionen ovan.
Finn eventuella globala max/min.

- (10) Bestäm samtliga extrempunkter till funktionen

$$f(x) = |\ln(x)|, \quad 1/2 \leq x \leq 2.$$

Finns globalt max/min på $[1/2, 2]$?

- (11) Låt
- $0 < x < 1$
- . Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin(x^n))^{1/n}.$$

Ledning: Försök uppskatta $(\sin(x^n))^{1/n}$ uppåt och nedåt med några lämpliga funktioner och använd Klämsatsen.

- (12) Bestäm

$$\arcsin(1/2) + \arccos(\sqrt{3}/2).$$

Bestäm

$$\arctan(1) + \arctan(2 - \sqrt{3}).$$

- (13) Visa att graferna till
- $\tan(x)$
- och
- $\arctan(x)$
- skär varandra bara i origo.

- (14) Funktionen
- $y = f(x)$
- är definierad implicit genom

$$(x^2 + 7)2^y = 16y,$$

i en omgivning till punkten $(1, 2)$. Bestäm $f'(1)$ samt $(f^{-1})'(2)$.

- (15) Låt

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{om } x \neq 0, \\ 0, & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

Bestäm $f'(0)$.

(16) Visa att funktionen

$$f(x) = e^x \sin(x), \quad -\pi/4 \leq x \leq 3\pi/4.$$

är inverterbar och bestäm $(f^{-1})'(0)$. Bestäm värdemängd och definitionsmängd för f och f^{-1} . Är inversen deriverbar på hela sin definitionsmängd?

(17) (Svårare) Låt α vara en parameter och

$$f(x) = \begin{cases} x2^{(|x|^\alpha)}, & \text{om } x \neq 0, \\ 0, & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

För vilka α är f deriverbar i $x = 0$? Isåfall vad är $f'(0)$?