

Skrivtid: 9.00 – 14.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogat formelblad. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp 32 poäng. LÖSNINGARNA SKALL INNEHÅLLA FÖRKLARANDE TEXT.

1. Bestäm följande gränsvärden

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + x \cos x}{e^x \cdot \ln(1 + 2x)} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 3x + x \cos x}{e^x \cdot \ln(1 + 2x)}$$

2. (a) Bestäm derivatan till funktionerna $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = \sin 2x$ och $h(x) = \sin(x^2)$.
(b) Finn ekvationen för tangenten till kurvan $x^3 + y^3 = 6xy$ i punkten $(x, y) = (3, 3)$.

3. Beräkna integralerna: (a) $\int_1^e x (\ln x)^2 dx$ (b) $\int_1^\infty \frac{x}{1 + x^4} dx$

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' = y + x^2 \sin x$ för vilken $y(\pi) = 0$.

5. Låt D vara området i 1:a kvadranten som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = 8 - x^2$ samt y -axeln (dvs $x \geq 0$ och $x^2 \leq y \leq 8 - x^2$).

- a) Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området D roteras kring x -axeln.
b) Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området D roteras kring y -axeln.

6. Låt $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$. Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av definitionsmängd samt eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.

7. Undersök konvergensen av följande serier:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7 + n^2 + 1}} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^6 + n^2 + 1}}$$

8. En tank har formen av en rät cirkulär cylinder med radie r , på vilken en halvsfär med radie r satts som lock, medan botten är plan. Vilken är tankens minimala area om dess volym är $V = \frac{5\pi}{3}$? (*Ledning:* Arean av en sfär med radie r är $4\pi r^2$.)

LYCKA TILL!!

Svar till tentamen i Envariabelanalys 2008–06–09

1. a) MacLaurinutveckling ger

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + x \cos x}{e^x \cdot \ln(1 + 2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \frac{(3x)^3}{3!} + O(x^5) + x \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)}{(1 + x + O(x^2)) \left(2x - \frac{(2x)^2}{2} + O(x^3)\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - \frac{9}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^3 + O(x^5)}{2x - 2x^2 + O(x^3) + 2x^2 - 2x^2 - 2x^3 + O(x^4) + O(x^3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 5x^2 + O(x^4)}{2 + O(x^2)} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

b) För positiva x gäller $-1 \leq \sin 3x \leq 1$ och $-x \leq x \cos x \leq x$, och alltså $-1 - x \leq \sin 3x + x \cos x \leq 1 + x$. Det följer att

$$\frac{-1 - x}{e^x \cdot \ln(1 + 2x)} \leq \frac{\sin 3x + x \cos x}{e^x \cdot \ln(1 + 2x)} \leq \frac{1 + x}{e^x \cdot \ln(1 + 2x)}$$

för positiva x . Men $\frac{1 + x}{e^x \cdot \ln(1 + 2x)} = \frac{1 + x}{e^x} \cdot \frac{1}{\ln(1 + 2x)} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$, eftersom e^x växer mycket snabbare än alla polynom. Det medför att bråken till vänster och till höger går mot 0. Instängningsatsen ger nu att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + x \cos x}{e^x \cdot \ln(1 + 2x)} = 0$.

Alternativ: Bryt ut snabbast växande: Uttrycket kan skrivas

$$\left(\frac{\sin 3x}{e^x} + \frac{x \cos x}{e^x} \right) \cdot \frac{1}{\ln(1 + 2x)}.$$

Detta uttryck går mot $(0 + 0) \cdot 0 = 0$ då $x \rightarrow \infty$. **SVAR:** a) 2. b) 0.

2. a) **SVAR:** $f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$, $g'(x) = 2 \cos 2x$ och $h'(x) = 2x \cos(x^2)$.

b) Implicit derivering ger $3x^2 + 3y^2 y' = 6y + 6xy'$, som kan förenklas till $y' = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x}$. Det följer att derivatan i punkten $(x, y) = (3, 3)$ är $y' = -1$. Tangentens ekvation blir därför $y - 3 = -1(x - 3)$. **SVAR:** $y = 6 - x$.

3. a) Partiell integration ger

$$\begin{aligned} \int_1^e x (\ln x)^2 dx &= \left[\frac{x^2}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e x \ln x dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \left(\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx \right) = \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4}(e^2 - 1). \end{aligned}$$

b) Med substitutionen $t = x^2$ fås $dt = 2x dx$ och

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{x}{1 + x^4} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{x}{1 + x^4} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_1^{R^2} \frac{dt}{1 + t^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \arctan t \right]_1^{R^2} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\arctan R^2 - \arctan 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

SVAR: a) $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$. b) $\frac{\pi}{8}$.

4. Ekvationen är linjär. Skriv först ekvationen på formen $y' - \frac{1}{x}y = x \sin x$. En primitiv funktion till $-\frac{1}{x}$ är $-\ln|x|$, integrerande faktor blir $e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|}$. Vi behandlar först fallet $x > 0$. Efter multiplikation med integrerande faktor kan ekvationen skrivas $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} y \right) = \sin x$, vilket ger att

$$\frac{1}{x}y = \int \sin x \, dx = -\cos x + C.$$

Alltså blir $y = -x \cos x + Cx$. Konstanten C bestäms begynnelsevillkoret $y(\pi) = 0$, vilket ger att $C = -1$. (När $x < 0$ är integrerande faktor $= -\frac{1}{x}$, och vi får $-\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} y \right) = -\sin x$, dvs samma som för $x > 0$). **SVAR:** $y = -x(1 + \cos x)$.

5. a) Skivformeln ger $V_x = \int_0^2 \pi[(8 - x^2)^2 - (x^2)^2] \, dx = 16\pi \int_0^2 (4 - x^2) \, dx = 256\pi/3$.

b) Rörformeln ger $V_y = \int_0^2 2\pi x[(8 - x^2) - x^2] \, dx = 4\pi \int_0^2 (4x - x^3) \, dx = 16\pi$.

6. Funktionen är udda. Av omskrivningen $f(x) = x + \frac{x}{x^2 - 1}$ framgår att $f(x) - x \rightarrow 0$ då $|x| \rightarrow \infty$ och $|f(x)| \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \pm 1$ så $y = x$ är sned asymptot då $x \rightarrow \pm\infty$ och $x = \pm 1$ är lodräta asymptoter. För derivatan gäller $f'(x) = x^2(x^2 - 1)^{-2}(x^2 - 3) = 0$ då $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ och $x = \sqrt{3}$. Teckenväxlingarna hos derivatan visar att det är frågan om en lokal max-punkt, en terrasspunkt respektive en lokal min-punkt.

7. Låt $a_n = \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7 + n^2 + 1}}$, $b_n = \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^6 + n^2 + 1}}$, $c_n = \frac{1}{n^{4/3}}$, $d_n = \frac{1}{n}$. Då $a_n/c_n \rightarrow 1$ och $b_n/d_n \rightarrow 1$ då $n \rightarrow \infty$ ger kvotformen av jämförelsekriteriet vid handen att $\sum a_n$ konvergerar medan $\sum b_n$ divergerar (ty $\sum c_n$ konvergerar medan $\sum d_n$ divergerar).

8. Låt cylinderns höjd vara h . Vi har då $V = \pi r^2 h + 2\pi r^3/3 = 5\pi/3$ och $A = \pi r^2 + 2\pi r h + 2\pi r^2 = 3\pi r^2 + 2\pi r h$. Elimination av h ger $f(r) = 3A/\pi = 5r^2 + 10/r$ som skall minimeras. Då $f'(r) = 10(r^3 - 1)/r^2 = 0$ då $r = 1$ (med teckenväxlingen $-0+$) inser vi att minimala arean är $A_{\min} = \pi f(1)/3 = 5\pi$.