UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
B. Styf (0707-253107)
I. Sigstam

Prov i matematik
ES, KandKe, K, STS, X, X-bio
Envariabelanalys
2008–03–14

Skrivtid: 15.00 – 20.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogat formelblad. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp 32 poäng. LÖSNINGARNA SKALL INNEHÅLLA FÖRKLARANDE TEXT. Om du hade 8 -12 (13 - 20) poäng på duggan skall du inte räkna den första uppgiften (de två första uppgifterna).

1. Bestäm följande gränsvärden

$$\text{(a)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{3x\, 2^{3x} + (\ln(e^{3x}))^4}{(1+4x)8^x + x^{25}}$$

2. (a) Låt $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{x}\right)$. Bestäm tangenten till kurvan $y = f(x)$ i den punkt där $x = 1$.

(b) Bestäm derivatan av funktionen $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

3. Beräkna integralerna

$$\text{(a)} \quad \int_0^{16} \frac{2+\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}+2}\, dx \qquad \text{(b)} \quad \int 2x \arctan x \, dx$$

4. (a) Lös differentialekvationen $y'' + 2y' + y = 0$ (där y är en funktion av t).

(b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' + y = 4e^t$, som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

5. Beräkna volymen av den kropp som fås då området som begränsas av x-axeln och kurvan $y = (8-x^2)^{\frac{1}{3}}$, $0 \le x \le \sqrt{8}$, roterar ett varv runt y-axeln.

6. Låt $f(x) = x + 1 + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$. Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av definitionsmängd samt eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.

7. Undersök konvergensen av följande serier:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+n^2)^{\frac{1}{3}}}{1+n+n^2} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{2}{3}} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$$

8. För funktionen f gäller att $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$, för $x > 0$, medan $f(x) = ax + b$, för $x \le 0$. Bestäm konstanterna a och b så att f blir kontinuerlig och deriverbar överallt.

Lösningar till tentamen i Envariabelanalys 2008–03–14

Lösning till problem 1. a) Förläng med konjugatet till täljaren, och förkorta därefter med x: Man får $\lim_{x\to 0} \dfrac{2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = 1/\sqrt{2}$.
b) Bryt ut snabbast växande term $(x\cdot 8^x)$ i täljaren och nämnaren, samt förkorta:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{81x^3}{8^x}}{4+\frac{1}{x}+\frac{x^{24}}{8^x}} = \frac{3}{4}.$$

Lösning till problem 2. a) Man har $f'(x) = \sqrt{2}\cos\!\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{x}\right)\cdot\dfrac{\pi}{8\sqrt{x}}$, och tangentens riktningskoefficient blir $f'(1) = \dfrac{\pi}{8}$. Tangentens ekvation blir $y-1 = \dfrac{\pi}{8}(x-1)$. **Svar:** $y = \dfrac{\pi}{8}x + 1 - \dfrac{\pi}{8}$.
b) Logaritmera $g(x)$, då fås $\ln\, g(x) = \dfrac{1}{x}\,\ln(1+x)$. Derivering ger:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = -\frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x},$$

vilket ger **Svar:** $g'(x) = (1+x)^{1/x}\left(\dfrac{1}{x(1+x)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$.

Lösning till problem 3. (a) Efter substitutionen $t = \sqrt{x}$ fås integralen

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{(2+t)2t}{t^2+3t+2}\,dt &= \int_0^4 \frac{(2+t)2t}{(t+2)(t+1)}\,dt = 2\int_0^4 \frac{t}{(t+1)}\,dt \\ &= 2\int_0^4 \left(1-\frac{1}{(t+1)}\right)dt = 2\Big[t-\ln|t+1|\Big]_0^4 = 8-2\ln 5.\end{aligned}$$

3(b) Använd partiell integration med $f' = 2x$ och $g = \arctan x$:

$$\begin{aligned}\int 2x\,\arctan x\,dx &= x^2\arctan x - \int x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= x^2\arctan x - \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = x^2\arctan x - \Big(x-\arctan x\Big) + C.\end{aligned}$$

Svar: (a) $8-2\ln 5$. (b) $(1+x^2)\arctan x - x + C$.

Lösning till problem 4. (a) Den karakteristiska ekvationen $r^2+2r+1=0$ har dubbelroten $r=-1$. Så lösningarna till ekvationen är $y_H = e^{-t}(A+Bt)$ där A och B är konstanter.
(b) Ansätt partikulärlösningen $y_P = Ce^t$. Då är $y_P = y_P' = y_P''$, och insättning i ekvationen ger $Ce^t + 2Ce^t + Ce^t = 4e^t$, vilket medför att $C=1$. Alla lösningar till ekvationen ges nu av

$$y = y_H + y_P = e^{-t}(A+Bt) + e^t.$$

Villkoret $y(0)=0$ ger att $A+1=0$, dvs $A=-1$. Derivering ger $y' = e^{-t}\Big(B-A-Bt\Big) + e^t$, så villkoret $y'(0)=0$ ger att $B-A+1=0$, dvs $B = A-1 = -1-1 = -2$.
Svar: $y = e^{-t}\Big(-1-2t\Big) + e^t$.

Lösning till problem 5. Med rörformeln och substitutionen $u = 8 - x^2$, $du = -2x\,dx$, får vi

$$V = \int_{x=0}^{x=\sqrt{8}} 2\pi x(8-x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx = \int_{u=8}^{u=0} -\pi u^{\frac{1}{3}}\,du = \left[-\pi\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}\right]_8^0 = \pi\frac{3}{4}2^4 = 12\pi$$

Svar: $V = 12\pi$.

Lösning till problem 6. Funktionen $f(x)$ är definierad då $x \neq 1$. Vi ser direkt att $f(x) - x - 1 \to 0$ då $x \to \pm\infty$, så $y = x + 1$ är asymptot både då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$. Efter omskrivningen $f(x) = x + 1 + \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$ är det också uppenbart att $f(x) \to +\infty$ då $x \to 1$, så vi har den lodräta asymptoten $x = 1$. För derivatan gäller

$$f'(x) = 1 - 3(x-1)^{-2} - 2(x-1)^{-3} = (x-1)^{-3}[(x-1)^3 - 3(x-1) - 2] = (x-1)^{-3}x^2(x-3)$$

Vi ser att $f'(x) > 0$ då $x < 1$, förutom att $f'(0) = 0$. Funktionen är alltså strängt växande för $x < 1$, med en terrasspunkt i $x = 0$. Ytterligare gäller att $f'(x) < 0$ för $1 < x < 3$, $f'(3) = 0$ och $f'(x) > 0$ då $3 < x$. Alltså har vi ett strikt lokalt minimum då $x = 3$ ($f(3) = 23/4$). Det efterfrågas inte i uppgiften, men orkar man derivera en gång till så får man $f''(x) = 6x(x-1)^{-4}$. Det följer att $f(x)$ är strikt konkav ("ledsen") då $x < 0$ och strikt konvex ("glad") då $0 < x$.
Svar: Asymptoter: $y = x + 1$ då $x \to \pm\infty$ och lodrät asymptot $x = 1$. Strikt lokalt minimum då $x = 3$ ($f(3) = 23/4$).

Lösning till problem 7. (a) För stora värden på n har vi

$$a_n = \frac{(2+n^2)^{\frac{1}{3}}}{1+n+n^2} = \frac{n^{\frac{2}{3}}(1+2n^{-2})}{n^2(1+n^{-1}+n^{-2})} \approx \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} = b_n$$

Då $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$ (ändligt tal) då $n \to \infty$ och $\sum b_n$ är en p-serie med $p > 1$ följer att $\sum a_n$ konvergerar, enligt jämförelsekriteriet på kvotform.

(b) Med hjälp av Maclaurinutvecklingen av $\cos x$, med $x = \dfrac{1}{n}$, får vi

$$a_n = n^{\frac{2}{3}}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) = n^{\frac{2}{3}}\left(1 - (1 - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^4})\right) = \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^2}\left(\frac{1}{2} + O(\frac{1}{n^2})\right) = b_n\left(\frac{1}{2} + O(\frac{1}{n^2})\right)$$

med samma b_n som i (a). Denna gång gäller att $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{1}{2}$ (ändligt tal) då $n \to \infty$, så $\sum a_n$ konvergerar.
Svar: Båda serierna konvergerar.

Lösning till problem 8. Man ser direkt att funktionen $f(x)$ har kontinuerliga derivator av alla ordningar för $x \neq 0$, så det räcker att bestämma a, b så att f blir kontinuerlig och deriverbar i origo. Genom Maclaurinutveckling av e^x får vi

$$f(x) = \frac{1}{x}(1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) - 1) = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$$

för $x > 0$. För kontinuitet i origo skall gälla att

$$b = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

Med $b = 1 = f(0)$ ges vänster- och högerderivatorna i origo av

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{(ah+1)-1}{h} = a, \quad \text{resp.} \quad f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{(1+\frac{h}{2}+O(h^2))-1}{h} = \frac{1}{2}$$

så vi har deriverbarhet i origo, med $f'(0) = \dfrac{1}{2}$, om och endast om $a = \dfrac{1}{2}$.

Svar: $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$.