UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
M. Melgaard, I. Sigstam
B. Styf, J. Östensson

Prov i matematik

Endimensionell analys
Envariabelanalys
2008–08–19

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogat formelblad. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp 32 poäng.
LÖSNINGARNA SKALL INNEHÅLLA FÖRKLARANDE TEXT.

1. Bestäm följande gränsvärden

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x+e^{2x}-e^{3x}}{3x+e^{2x}-e^{5x}} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x+e^{2x}-e^{3x}}{3x+e^{2x}-e^{5x}}$$

2. (a) Derivera funktionerna $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ och $g(x) = \dfrac{x}{1+\ln x}$.

(b) Bestäm minsta värdet hos funktionen $h(x) = x^x$, $x > 0$.

3. Beräkna integralerna

$$\text{(a)} \quad \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 (3x^2+1)\arctan x\,dx$$

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + 2xy = 2x^3$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

5. Låt D vara området som ges av $0 \le y \le \dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$, $x \ge 1$. Beräkna volymen av den kropp som fås då området D roteras runt y-axeln.

6. Skissera kurvan $y = \dfrac{(x^2+x+2)^2}{x^3}$ i dess huvuddrag, med angivande av definitionsmängd, eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.

7. Undersök konvergensen av följande serier:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+\ln n} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\ln n}$$

8. Kurvan $y = f(x)$ ligger i första kvadranten, och är sådan att för varje $a > 0$ gäller att tangenten i punkten $(a, f(a))$ skär y-axeln i punkten $(0, 2af(a))$. Vidare gäller $f(1) = 1$. Bestäm funktionen f.

Svar till tentamen i Endimensionell analys
Envariabelanalys 2008–08–19

1. (a) $\dfrac{5}{21}$ (b) $\dfrac{1}{3}$.

2. (a) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ och $g'(x) = \dfrac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$.
(b) Minsta värdet är $h(1/e) = e^{-1/e}$.

3. (a) $-2\cos\sqrt{x} + C$ (b) $\dfrac{\pi - 1}{2}$.

4. $y(x) = x^2 - 1 + e^{-x^2}$.

5. $\pi \ln 2$.

6. Definitionsmängden är $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Lodrät asymptot: $x = 0$. Sned asymptot: $y = x + 2$. Lokalt maximum -2 i $x = -2$ och lokalt minimum $\dfrac{196}{27}$ i $x = 3$. Kurvan visas i Figur 1 nedan.

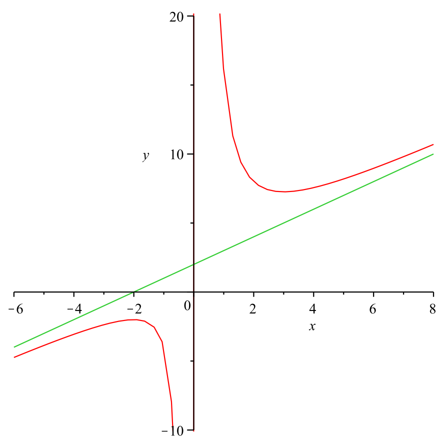

Figure 1: Kurvan $y = \dfrac{(x^2+x+2)^2}{x^3}$.

7. (a) Divergent. (b) Konvergent.

8. $f(x) = xe^{2(1-x)}$.

Lösningar till tentamen i Endimensionell analys
Envariabelanalys 2008–08–19

Lösning till problem 1. (a) MacLaurinutveckling ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+e^{2x}-e^{3x}}{3x+e^{2x}-e^{5x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1+2x+2x^2+O(x^3)-(1+3x+\frac{9}{2}x^2+O(x^3))}{3x+1+2x+2x^2+O(x^3)-(1+5x+\frac{25}{2}x^2+O(x^3))}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5}{2}+O(x)}{-\frac{21}{2}+O(x)}=\frac{5}{21}.$$

(b) Substituera $t=-x$ och förkorta med t:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x+e^{2x}-e^{3x}}{3x+e^{2x}-e^{5x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t+e^{-2t}-e^{-3t}}{-3t+e^{-2t}-e^{-5t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{te^{2t}}-\frac{1}{te^{3t}}}{-3+\frac{1}{te^{2t}}-\frac{1}{te^{5t}}}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}.$$

Lösning till problem 2. a) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Kvotregeln ger $g'(x)=\dfrac{1\cdot(1+\ln x)-x\cdot\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2}=\dfrac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$.

b) Logaritmisk derivering: Logaritmera ger $\ln h(x)=x\ln x$. Derivera denna likhet med produktregeln: $\dfrac{h'(x)}{h(x)}=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=1+\ln x$. Alltså blir $h'(x)=x^x(1+\ln x)$. För $x>0$ gäller

$$h'(x)=0\iff \ln x=-1\iff x=\frac{1}{e}.$$

Teckenstudium ger att $h'(x)<0$ i intervallet $(0,\frac{1}{e})$ och $h'(x)>0$ i intervallet $(\frac{1}{e},\infty)$. Alltså har h sitt minsta värde vid $x=\dfrac{1}{e}$. Det minsta värdet är $h(1/e)=(1/e)^{1/e}$.

Lösning till problem 3. a) Substitutionen $t=\sqrt{x}$ ger $dx=2t\,dt$ och vi får

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx=\int\frac{\sin t}{t}\cdot 2t\,dt=\int 2\sin t\,dt=-2\cos t+C=-2\cos\sqrt{x}+C.$$

b) Partiell integration ger

$$\int_0^1(3x^2+1)\arctan x\,dx=\big[(x^3+x)\arctan x\big]_0^1-\int_0^1\frac{x^3+x}{1+x^2}\,dx=2\arctan 1-\int_0^1 x\,dx$$
$$=2\cdot\frac{\pi}{4}-\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^1=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\pi-1).$$

Lösning till problem 4. En primitiv funktion till $2x$ är x^2. Multiplikation med integrerande faktor e^{x^2} ger ekvationen $\dfrac{d}{dx}(ye^{x^2})=2x^3e^{x^2}$. Vi får (med substitutionen $t=x^2$ och därefter partiell integration)

$$ye^{x^2}=\int 2x^3e^{x^2}\,dx=\Big[t=x^2\Big]=\int te^t\,dt$$
$$=te^t-\int e^t\,dt=te^t-e^t+C=e^t(t-1)+C=e^{x^2}(x^2-1)+C,$$

vilket ger att $y=x^2-1+Ce^{-x^2}$. Begynnelsevärdet $y(0)=0$ ger att $C=1$, så $y=x^2-1+e^{-x^2}$.

Lösning till problem 5. Sökt volym ges av den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{2\pi x}{x^2(x^2+1)}\,dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx.$$

Vi gör först en partialbråksuppdelning:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+x(Bx+C)}{x(x^2+1)}.$$

Detta ger att

$$\begin{cases} A + B & = 0 \\ \quad\quad C & = 0 \\ A & = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \end{cases},$$

varför

$$\begin{aligned} 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx &= 2\pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx \\ &= 2\pi \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^\infty \\ &= 2\pi \left[\ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right]_1^\infty = 2\pi\left(0 - \left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)\right) = \pi \ln 2. \end{aligned}$$

Lösning till problem 6. Sätt $f(x) = \dfrac{(x^2+x+2)^2}{x^3}$. Klart då att $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vidare klart att $f(x) \to +\infty$ då $x \to 0^+$ och att $f(x) \to -\infty$ då $x \to 0^-$. Alltså är $x = 0$ en lodrät asymptot. Genom utveckling av kvadraten i täljaren och termvis division, så inses vidare att $f(x) = x + 2 + \rho(x)$, där $\rho(x) \to 0$ då $x \to \pm\infty$. Alltså är $y = x + 2$ sned asymptot då $x \to \pm\infty$. Derivering ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x^2+x+2)\cdot(2x+1)\cdot x^3 - (x^2+x+2)^2 \cdot 3x^2}{x^6} \\ &= \frac{(x^2+x+2)\cdot\big[2(2x+1)x - 3(x^2+x+2)\big]}{x^4} \\ &= \frac{(x^2+x+2)(x^2-x-6)}{x^4} = \frac{(x^2+x+2)(x+2)(x-3)}{x^4}. \end{aligned}$$

Faktorn $x^2 + x + 2$ saknar reella nollställen, d.v.s. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ eller $x = 3$.
Vi har nu underlag för följande teckenstudium:

x		-2		0		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	odef.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	odef.	$\searrow$	$196/27$	$\nearrow$

Grafen till funktionen f visas i Figur 1 ovan.

Lösning till problem 7. Låt $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+\ln n}$, $b_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\ln n}$, $c_n = \dfrac{1}{n^{1/2}}$, $d_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Då gäller

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{n}{n+\ln n} = \frac{1}{1+\ln n/n} \to 1, \qquad n \to \infty$$

och

$$\frac{b_n}{d_n} = \frac{n^2}{n^2+\ln n} = \frac{1}{1+\ln n/n^2} \to 1, \qquad n \to \infty$$

Kvotformen av jämförelsekriteriet ger vid handen att $\sum a_n$ divergerar medan $\sum b_n$ konvergerar (ty $\sum c_n$ divergerar medan $\sum d_n$ konvergerar).

Lösning till problem 8. Vi har två uttryck för tangentlutningen i $(a, f(a))$; dels $f'(a)$, dels $\dfrac{f(a) - 2af(a)}{a - 0} = (1/a - 2)f(a)$. En differentialekvation för kurvan $y = f(x)$ är därför

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x} - 2\right) y$$

Lösningen till denna separabla ekvation ges av

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{x} - 2\right) dx$$

$$\ln y = A + \ln x - 2x = \ln B + \ln x + \ln e^{-2x} = \ln \left(Bxe^{-2x}\right)$$

Alltså har vi $y = Bxe^{-2x} = f(x)$, $1 = f(1) = Be^{-2}$, $f(x) = xe^{2(1-x)}$.