

Skrivtid 8-13. Hjälpmedel; skrivdon och bifogade formler. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.  
Vid bedömningen tas hänsyn till helhetsintrycket!

1. Bestäm följande gränsvärden:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \sin x}{\cos x - 1}$$

2. Finn den funktion  $y(x)$  som uppfyller att  $y'' = x^2 + y$  och där  $y(0) = y'(0) = 0$ .

3. Beräkna integralerna:

$$(a) \int_0^1 (3x^2 + 1) \arctan x \, dx$$

$$(b) \int \frac{\sqrt{x}}{x-1} \, dx.$$

4. En likbent triangel är inskriven i enhetscirkeln. Bestäm dess maximala area.

5. Området mellan x-axeln och kurvan  $y = \sin x$ , med  $0 \leq x \leq \pi$ , roteras kring y-axeln.  
Hur stor blir volymen av den uppkomna kroppen?

6. Undersök funktionskurvan

$$y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

med avseende på eventuella asymptoter, lokala extrempunkter och inflexionspunkter, samt skissa kurvan.

7. Bevisa att funktionen  $f(x) = e^x - e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  har invers. Bestäm sedan en ekvation för tangenten till kurvan  $y = f^{-1}(x)$  i den punkt där  $x = -\frac{3}{2}$ .

8. Undersök konvergensen hos serierna

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\sqrt{n})}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n^2}$$