UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
B. Styf (0707-253107)
I. Sigstam

Prov i matematik
ES, KandKe, K, STS, X, X-bio
Envariabelanalys
2009–03–13

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogat formelblad. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp 32 poäng. LÖSNINGARNA SKALL INNEHÅLLA FÖRKLARANDE TEXT. Om du hade 9–13 (14–20) poäng på duggan skall du inte lämna in uppgift 1 (uppgifterna 1 och 2).

1. Bestäm följande gränsvärden

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \ln(x+1)}{x \sin x} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$$

2. (a) Derivera funktionen $f(x) = \ln|x+2|$.
(b) Derivera funktionen $g(x) = |x+2|^x$.
(c) Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = g(x)$ i den punkt där $x = -1$.

3. Beräkna integralerna: (a) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x-1}{x^2-2x-3}\,dx$

4. Lös differentialekvationen $(x^2+1)y' = y(x+1)$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 1$.

5. Bestäm volymen av den kropp som genereras då området som ges av $\sin x \le y \le 1$ och $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ roteras kring (a) x-axeln, (b) y-axeln.

6. Låt $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$. Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av definitionsmängd samt eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.

7. Avgör konvergensen av följande serier:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \arctan\frac{1}{n^2} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\arctan n$$

8. Betrakta en rätvinklig triangel med omkrets 1. Låt a vara längden på den ena kateten.

a) Visa att triangelns area kan skrivas $A(a) = \dfrac{2a^2-a}{4a-4}$.
b) Bestäm triangelns sidor så att arean blir så stor som möjligt. Ange också den maximala arean.

LYCKA TILL!!

Svar till tentamen i Envariabelanalys 2009–03–13

1. SVAR: a) $\frac{1}{2}$. (Maclaurinutveckling) b) 1. (Sätt $t = \frac{1}{x}$, och Maclaurinutveckla e^t.)

2. SVAR: a) $f'(x) = \frac{1}{x+2}$. b) $g'(x) = |x+2|^x \left(\ln|x+2| + \frac{x}{x+2} \right)$.
c) Tangentens ekvation är $y = -x$.

3. a) Substitutionen $t = \sqrt{x}$ ger $dx = 2t\,dt$ och integralen blir $\int_0^{\pi} 2t \sin t\,dt$. Partiell integration ger $[2t(-\cos t)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\cos t dt = 2\pi + 0 = 2\pi$. b) Faktorisera nämnaren $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ och partialbråksuppdela:

$$\frac{3x-1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-3}.$$

Integralen är alltså

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-3} \right) dx = \Big[\ln|x+1| + 2\ln|x-3| \Big]_0^2 = -\ln 3.$$

SVAR: a) 2π. b) $-\ln 3$.

4. Ekvationen är separabel (och linjär). Vi får $\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$, så att

$$\ln|y| = \int \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C.$$

Av villkoret $y(0) = 1$ får man att konstanten $C = 0$. Vi har alltså $\ln|y| = \ln\sqrt{x^2+1} + \arctan x$, och alltså $|y| = e^{\ln\sqrt{x^2+1} + \arctan x} = \sqrt{x^2+1} \cdot e^{\arctan x}$, vilket ger
$y = \pm\sqrt{x^2+1} \cdot e^{\arctan x}$. Endast den positiva lösningen uppfyller begynnelsevillkoret.
SVAR: $y = \sqrt{x^2+1} \cdot e^{\arctan x}$.

5. (a) Skivformeln ger volymen

$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)\,dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

(b) Skalformeln ger volymen (partiell integration används)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x(1 - \sin x)\,dx = \Big[2\pi x(x + \cos x) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi(x + \cos x)\,dx = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi.$$

6. Funktionen är udda eftersom $f(-x) = -f(x)$. Definitionsmängd $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 2 \text{ och } x \neq -2\}$. Eftersom $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ och $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ så är linjen $x = 2$ lodrät asymptot, uppåt från höger, och neråt från vänster sida. Eftersom f är udda är också linjen $x = -2$ lodrät asymptot, neråt från vänster och uppåt från höger sida.
Polynomdivision ger $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x}{x^2-4}$, varur vi ser att linjen $y = x$ är sned asymptot åt båda håll. (Eftersom $f(x) - x \longrightarrow 0$ då $x \to \pm\infty$.)

Extrempunkter: Derivera med kvotregeln (eller efter omskrivning med produktregeln!). Efter förenkling och faktorisering får man

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

så att stationära punkter är 0 och $\pm 2\sqrt{3}$. Teckenstudietabell:

x		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	odef.	$-$	0	$-$	odef.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-3\sqrt{3}$	$\searrow$	odef.	$\searrow$	0	$\searrow$	odef.	$\searrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$

Vi ser att f har lokalt maximum vid $x = -2\sqrt{3}$, terrass vid $x = 0$ och lokalt minimum vid $x = 2\sqrt{3}$.

7. a) Divergent. (Maclaurinutveckla $\arctan \frac{1}{n^2}$, och jämför med harmoniska serien.)

b) Konvergent. (Kom ihåg att $\lim_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$, och jämför med den konvergenta serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.)

8. a) Den andra katetens längd är $b = \frac{2a-1}{2a-2}$, (härleds från Pythagoras sats och att omkretsen är 1). Arean blir $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.

b) Arean blir störst när $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Då är $b = a$ och hypotenusan är $c = 1 - a - b = 1 - 2a = \sqrt{2} - 1$. Den maximala arean blir $\frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}$.