UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
B. Styf (0707-253107)
I. Sigstam

Prov i matematik
ES, KandKe, K, STS, X, X-bio
Envariabelanalys
2009–06–08

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogat formelblad. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp 32 poäng. LÖSNINGARNA SKALL INNEHÅLLA FÖRKLARANDE TEXT.

1. Bestäm följande gränsvärden

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan 6x}{\ln(1+4x)+\sin 2x} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\left(e^{\sqrt{x}}\right)^{7x}\right)+x\cdot 3^{-2x}}{\sqrt{x}(2-8x)+x^{2/3}}$$

2. (a) Derivera funktionerna $f(x)=\cos^2 x$, $g(x)=\cos 2x$ och $h(x)=\cos x^2$.

(b) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $x^3y - xy^2 = y - 4x$ i punkten $(x,y) = (1,2)$.

3. Beräkna integralerna: (a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx$

4. Lös differentialekvationen $y'' - 4y = e^{-2x}$ med begynnelsevillkoret $y(0) = -1$ och $y'(0) = 1$.

5. Bestäm volymen av den kropp som genereras då området som ges av $1 \le y \le 2\cos x$ och $0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$ roteras kring x-axeln.

6. Rita kurvan $y = \sqrt{4x^2+x}$ med angivande av definitionsmängd samt eventuella asymptoter och lokala extrempunkter. Ange även var funktionen är växande respektive avtagande.

7. Avgör konvergensen av följande serier:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+7}{\sqrt[3]{n^7+n^3}} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

8. En målarburk har formen av en rät cirkulär cylinder, med radien r och höjden h, försedd med en plan botten men inget lock. Bestäm den maximala volymen av en sådan burk om dess totala area är A.

LYCKA TILL!!

Svar till tentamen i Envariabelanalys 2009–06–08

1. a) 1. (Maclaurinutveckling) b) $-\frac{7}{8}$. (ln-termen i täljaren kan skrivas $7x\sqrt{x}$.)

2. a) $f'(x) = -2\cos x \sin x$, $g'(x) = -2\sin 2x$, $h'(x) = -2x \sin x^2$.
b) Tangentens ekvation är $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

3. a) $1 - \frac{2}{e}$ (partiell integration med $f = \ln x$ och $g' = \frac{1}{x^2}$).
b) $\frac{1}{2}\ln 3$. (Partialbråksuppdelning ger $\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right)$. Vidare gäller $\lim_{R\to\infty} \frac{R+1}{R+3} = 1$ och då fås $\lim_{R\to\infty}\big(\ln(R+1) - \ln(R+3)\big) = \lim_{R\to\infty} \ln\left(\frac{R+1}{R+3}\right) = \ln 1 = 0$.)

4. $y = -\left(\frac{13}{16} + \frac{1}{4}x\right)e^{-2x} - \frac{3}{16}e^{2x}$.

5. Volymen är $\int_0^{\pi/3} \left(\pi(2\cos x)^2 - \pi \cdot 1^2\right) dx = \pi\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6. Funktionen är definierad för $x \le -\frac{1}{4}$ och för $x \ge 0$. Derivatan $y' = \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x}}$. Derivatans nollställe $x = -\frac{1}{8}$ är ej i definitionsområdet, så funktionen saknar kritiska punkter. Eftersom derivatan finns i hela definitionsområdet saknas även singulära punkter. Teckenstudietabell:

x		$-\frac{1}{4}$		0	
y'	$-$		odef		$+$
y	$\searrow$	0	odef	0	$\nearrow$

Vi ser att funktionen är strängt avtagande på intervallet $(-\infty, -\frac{1}{4}]$ och strängt växande på intervallet $[0, \infty)$ samt att y har lokala minimum vid $x = -\frac{1}{4}$ och vid $x = 0$, båda med värdet 0.
Sned asymptot till vänster: $y = -2x - \frac{1}{4}$. ($\lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = -2$ och $\lim_{x\to-\infty}(y + 2x) = -\frac{1}{4}$.)
Sned asymptot till höger: $y = 2x + \frac{1}{4}$. ($\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = 2$ och $\lim_{x\to\infty}(y - 2x) = \frac{1}{4}$.)

7. (a) Konvergent. (Använd t ex jämförelsekriteriet på kvotform, jämför med serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$.)
(b) Konvergent. (Använd Leibniz sats för alternerande serier.)

8. Den maximala volymen är $V = \frac{A}{3}\sqrt{\frac{A}{3\pi}}$.
(Ur sambandet $A = \pi r^2 + 2\pi rh$ fås $h = \frac{A - \pi r^2}{2\pi r}$, vilket ger V som en funktion av r som $V(r) = \frac{A}{2}r - \frac{\pi}{2}r^3$, $0 \le r \le \sqrt{\frac{A}{\pi}}$. Derivatan $V'(r) = \frac{1}{2}(A - 3\pi r^2)$ har nollställe då $r = \sqrt{\frac{A}{3\pi}}$. Med t ex teckenstudium visas att detta är en maximipunkt. Volymen blir alltså störst om $r = \sqrt{\frac{A}{3\pi}}$. Observera sedan att för detta r-värde får vi höjden $h = \frac{A - \pi r^2}{2\pi r}$ som förenklas till $h = r$.)