UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
B. Styf (0707-253107)
I. Sigstam

Prov i matematik
Alla program och fristående kurs
Envariabelanalys
2009–08–19

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogat formelblad. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp 32 poäng. LÖSNINGARNA SKALL INNEHÅLLA FÖRKLARANDE TEXT.

1. Bestäm följande gränsvärden

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - 2\sin x + e^x - 1}{\arctan x - x} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to -\infty} x + \sqrt{x^2+4x+\pi}$$

2. (a) Ange definitionen av $\tan x$ i termer av $\sin x$ och $\cos x$. Visa därefter att derivatan av $\tan x$ är $1 + \tan^2 x$.

(b) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \tan^2(\frac{x}{4})$ i punkten där $x = \pi$.

3. Beräkna integralerna: (a) $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{(4+x^2)(x-4)}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty (x^2+1)e^{-x}\,dx$

4. Bestäm en lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' - 3y = e^x$ för vilken $y(0) = 1$ och $\lim_{x\to-\infty} y(x)$ existerar.

5. Bestäm volymen av den kropp som genereras då området som begränsas av x-axeln och kurvan $y = \dfrac{\ln x}{x}$, $1 \le x < \infty$, roterar runt x-axeln.

6. Rita kurvan $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ med angivande av definitionsmängd samt eventuella asymptoter och lokala extrempunkter. Ange även intervall där funktionen är konvex (glad) respektive konkav (ledsen).

7. Avgör konvergensen av följande serier:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\frac{1}{n^2}.$$

8. I en kon K med höjden H inskrivs en kon L så att L:s spets är mitt på K:s bas. Bestäm L:s höjd h (i termer av H) så att L:s volym blir maximal. (Båda konerna är räta och cirkulära.)

LYCKA TILL!!

Svar till tentamen i Envariabelanalys 2009–08–19

1. a) $-\frac{5}{2}$. (Maclaurinutveckling) b) -2. (Förläng med konjugatet.)

2. a) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Använd deriveringsregler. b) Tangentens ekvation är $y = x + 1 - \pi$.

3. a) $\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + \ln|x-4| + C$, C konstant. (Partialbråksuppdela innan du integrerar.) b) 3. (Partiell integration, samt glöm ej motivera gränsövergången.)

4. $y = e^x\left(1 + \frac{x}{4}\right)$. (Homogen lösning $y_H = Ae^{-3x} + Be^x$; partikulärlösning $y_P = \frac{1}{4}xe^x$; allmän lösning $y = Ae^{-3x} + Be^x + \frac{1}{4}xe^x$. Villkoret $y(0) = 1$ ger att $A + B = 1$. Villkoret att gränsvärdet av y ska existera då x går mot $-\infty$ ger att $A = 0$. Alltså blir $B = 1$.)

5. 2π. (Volymen är $\int_1^\infty \pi\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ som efter substitutionen $u = \ln x$ blir $\int_0^\infty u^2e^{-u}\,du$. Gör färdigt liknande uppgift 3b.)

6. Funktionen är definierad för $x \neq 0$. Derivatan $y' = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$, så $y'(x) < 0$ överallt där y' existerar. Funktionen saknar stationära punkter eftersom $y' \neq 0$. Funktionen har inga lokala extrempunkter, eftersom det inte heller finns ändpunkter eller punkter i definitionsmängden där derivatan ej existerar. Asymptoter:
$\lim_{x\to\infty} y = 1$ ger att $y = 1$ är horisontell asymptot till höger.
$\lim_{x\to-\infty} y = 0$ ger att $y = 0$ är horisontell asymptot till vänster.
$\lim_{x\to 0^-} y = -\infty$ ger att $x = 0$ är vertikal asymptot neråt.
$\lim_{x\to 0^+} y = +\infty$ ger att $x = 0$ är vertikal asymptot uppåt.
Andraderivatan: $y'' = \frac{e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3}$ är negativ till vänster om 0, och positiv till höger om 0. Därför är kurvan konkav på $(-\infty, 0)$ och konvex på $(0, \infty)$.
Skissa själv!

7. (a) Konvergent. (Använd Leibniz sats för alternerande serier.)
(b) Divergent. (Använd t ex jämförelsekriteriet på kvotform. Jämför med den harmoniska serien:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1 \text{ då } n \to \infty$$

enligt ett känt standardgränsvärde. Eftersom $1 > 0$ och harmoniska serien är divergent, följer påståendet.)

8. $h = \frac{1}{3}H$. (Volymen av en kon med höjd h och bottenradie r är $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Genom att betrakta linjen genom $(0, R)$ och $(H, 0)$ får vi $r = \frac{R}{H}(H - x)$, och den lilla konens volym kan skrivas $V(h) = \frac{\pi R^2}{3H^2}(h^3 - 2Hh^2 + H^2h)$, definitionsmängd: $0 \leq h \leq H$.
Derivatan $V'(h) = \frac{\pi R^2}{3H^2}(3h^2 - 4Hh + H^2)$ har nollställe för $h = H$ och $h = \frac{H}{3}$.
Teckenstudietabell visar att $h = \frac{H}{3}$ ger maximal volym.)