

*Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogat formelblad. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp 32 poäng, där ev. bonuspoäng är inräknade. Hoppa över uppgift 1 om du klarade duggan vi hade i januari 2010.*

1. Bestäm följande gränsvärden:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}).$$

2. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan  $2x^3y - y^3x = 1$  i punkten  $(1, 1)$ .

3. Beräkna integralerna:

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(x+1)} dx \quad (b) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx.$$

4. Lös differentialekvationen

$$y'' - y' = e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

5. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området

$$x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

roteras kring  $y$ -axeln.

6. Rita kurvan  $y = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$  med angivande av definitionsmängd samt eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.

7. Undersök konvergensen av följande serier:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sqrt{n}}{(n^2 + 1)^2} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln(5 + e^{n^2})}.$$

8. I en sfär med radien  $R$  inskrivs en rät cirkulär kon. Bestäm konens maximala volym.