UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sigstam, Styf

Prov i matematik
ES, K, KandKemi, STS, X
ENVARIABELANALYS
2011-03-11

Skrivtid: 14.00 - 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogat formelblad. För betyget 3 krävs 18 poäng (av 24) på del A. För betyget 4 krävs 18 poäng på del A och 25 poäng totalt. För betyget 5 krävs 18 poäng på del A och 32 poäng totalt. Gör inte de stjärnmärkta uppgifterna om du klarat duggan.

Del A

1* Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$ i punkten där $x = 2$. (2)

2* Bestäm, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 4x + 5}{6x^3 + x^2 + 7}.$$ (2)

3* Bestäm $f'(-e)$ om $f(x) = e^{-x}|x|^x$. (2)

4. Bestäm, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x - 6\sin x + \arctan 3x}{x - x\,\cos x}$$

genom att Maclaurinutveckla de ingående funktionerna. (2)

5. Avgör om

$$1 = \int_{-1}^{1} \frac{e^x\,dx}{e^x + 1}.$$

(2)

6. Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos\tfrac{x}{2}\,dx.$$ (2)

7. Beräkna integralen

$$\int \frac{x-2}{x^2 + 2x}\,dx.$$ (2)

8. Lös differentialekvationen $\sqrt{x}\,y' + y = 1, \quad y(0) = 2$. (2)

9. Lös differentialekvationen $y'e^x = xy^2$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. (2)

10. Lös differentialekvationen $y'' - y' - 2y = x + 1$. (2)

11. Avgör konvergensen hos serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\sqrt{n} + \ln n}{n^3 + \ln(n^4)}.$$ (2)

12. Låt $f(x) = 1 + 4x^3 + \ln\sqrt{x}, \quad x > 0$.
Visa att f är inverterbar samt bestäm $(f^{-1})'(5)$, dvs inversens derivata i punkten 5. (2)

Del B

13. Låt D vara området i xy-planet som ges av $\cos x \le y \le \sin x$, $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$. Beräkna volymen av den kropp som genereras då D roterar kring
(a) x-axeln, (b) y-axeln. (4)

14. Rita kurvan $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$. Bestäm extrempunkter och asymptoter.
Ange intervall där kurvan är konvex eller konkav. (4)

15. För funktionen f gäller att $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{x}$ för $x < 0$, medan $f(x) = ax + b$ för $x \ge 0$.
Bestäm konstanterna a och b så att f blir kontinuerlig och deriverbar överallt. (4)

16. En likbent triangel har hörnen på ellipsen $4x^2 + y^2 = 4$ så att spetsen (där de lika benen möts) ligger i punkten $(-1, 0)$. Bestäm största möjliga arean av en sådan triangel. (4)

Trigonometriska formler

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x), \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + O(x^{2m+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + O(x^{2m+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + O(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + O(x^{n+1})$$