UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sigstam, Styf

Prov i matematik
ES, K, KandKemi, STS, X
ENVARIABELANALYS
2011-03-11

Svar till tentan 2011-03-11.

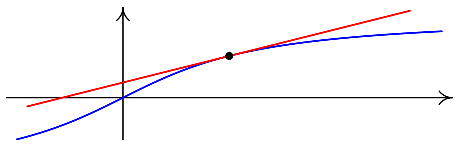
Del A

1* Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$ i punkten där $x = 2$.

Lösning. En ekvation för tangenten till $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$ är, som bekant, $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Här har vi $a = 2$, $f(2) = \frac{\pi}{4}$ och

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\frac{1}{2} = \frac{2}{4+x^2}, \quad f'(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

En ekvation för tangenten är alltså $y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(x-2)$.



□

2* Bestäm, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-4x+5}{6x^3+x^2+7}$$

Lösning. Vi förlänger med x^{-3} och får

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{\frac{2x^3-4x+5}{6x^3+x^2+7} = \frac{2-4/x^2+5/x^3}{6+1/x+7/x^3}\right\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

□

3* Bestäm $f'(-e)$ om $f(x) = e^{-x}|x|^x$. (2)

Lösning. Här behövs det logaritmisk derivering. Vi har

$$f(-e) = e^e e^{-e} = 1, \qquad \ln|f(x)| = \ln f(x) = -x + x\ln|x|,$$

$$D\ln|f(x)| = -1 + x\,\frac{1}{x} + \ln|x| = \ln|x|, \quad f'(x) = f(x)\ln|x|, \quad f'(-e) = f(-e)\ln e = 1.$$

Svar. $f'(-e) = 1$. □

4. Bestäm, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x - 6\sin x + \arctan 3x}{x - x\,\cos x}$$

genom att Maclaurinutveckla de ingående funktionerna.

Lösning. För täljaren och nämnaren har vi utvecklingarna

$$T = 3x - 6\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right) + \left(3x - \frac{27x^3}{3} + O(x^5)\right) = -8x^3 + O(x^5)$$

respektive

$$N = x - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) = \frac{x^3}{2} + O(x^5)$$

Detta ger oss

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{3x - 6\sin x + \arctan 3x}{x - x\,\cos x} = \frac{-8x^3 + O(x^5)}{\frac{x^3}{2} + O(x^5)} = \frac{-8 + O(x^2)}{\frac{1}{2} + O(x^2)}\right\} = \frac{-8}{\frac{1}{2}} = -16$$

Svar. Gränsvärdet är -16. □

5. Avgör om

$$1 = \int_{-1}^{1} \frac{e^x dx}{e^x + 1} = I.$$

Lösning. Substitutionen $u = e^x,\ du = e^x dx$, ger

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=-1}^{x=1} \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \int_{u=e^{-1}}^{u=e} \frac{du}{u+1} \\ &= [\ln|u+1|]_{u=e^{-1}}^{u=e} = \ln(e+1) - \ln(e^{-1}+1) \\ &= \ln\frac{e+1}{e^{-1}+1} = \ln\frac{e(e+1)}{e(e^{-1}+1)} = \ln\frac{e(e+1)}{1+e} = \ln e = 1 \end{aligned}$$

Påståendet att $1 = I$ är alltså sant. □

6. Beräkna integralen

$$I = \int_0^{\pi} (\pi - x)\cos\tfrac{x}{2}\,dx. \tag{2}$$

Lösning. Med partiell integration får vi

$$\begin{aligned} I &= \left[(\pi - x)2\sin\tfrac{x}{2}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} (-1)2\sin\tfrac{x}{2}\,dx \\ &= 0 - 0 - \left[4\,\cos\tfrac{x}{2}\right]_{x=0}^{x=\pi} = -\left(4\,\cos\tfrac{\pi}{2} - 4\,\cos 0\right) = 4. \end{aligned}$$

Svar. $I = 4$. □

7. Beräkna integralen

$$I = \int \frac{x-2}{x^2 + 2x}\,dx.$$

Lösning. Vi partialbråksutvecklar funktionen:

$$\frac{x-2}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A}{x(x+2)} \quad \Longrightarrow \quad A=-1, \quad B=2.$$

Detta ger oss

$$I = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} \right) dx = C - \ln|x| + 2\ln|x+2|.$$

□

8. Lös differentialekvationen $\sqrt{x}\, y' + y = 1, \quad y(0) = 2.$

Lösning. Ekvationen, som är linjär av första ordningen, har standardformen

$$y' + x^{-\frac{1}{2}} y = x^{-\frac{1}{2}}$$

Vi har $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $G(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$. Den integrerande faktorn är alltså

$$e^{G(x)} = e^{2x^{\frac{1}{2}}}$$

Efter multiplikation med den integrerande faktorn kan ekvationen skrivas

$$\frac{d}{dx}\left[e^{2x^{\frac{1}{2}}} y \right] = x^{-\frac{1}{2}} e^{2x^{\frac{1}{2}}}$$

Integration av båda leden ger

$$e^{2x^{\frac{1}{2}}} y = \int x^{-\frac{1}{2}} e^{2x^{\frac{1}{2}}} dx = e^{2x^{\frac{1}{2}}} + C$$

Den allmänna lösningen är alltså

$$y = 1 + C\, e^{-2x^{\frac{1}{2}}}$$

Begynnelsevillkoret ger

$$2 = y(0) = 1 + C \quad \Longrightarrow \quad C = 1.$$

Svar. $y = 1 + e^{-2x^{\frac{1}{2}}}$. □

9. Lös differentialekvationen $y' e^x = xy^2$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 1$.

Lösning. Ekvationen är separabel. Lösningen ges av

$$\int -y^{-2} dy = \int -x\, e^{-x} dx, \quad y^{-1} = x\, e^{-x} - \int (1)\, e^{-x} dx = (x+1)e^{-x} + C$$

Den allmänna lösningen är alltså

$$y = \frac{1}{(x+1)e^{-x} + C}$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger

$$1 = y(0) = \frac{1}{1+C} \quad \Longrightarrow \quad C = 0.$$

Svar. $y = (x+1)^{-1} e^x$. □

10. Lös differentialekvationen $y'' - y' - 2y = x + 1$ (IH).

Lösning. Karakteristiska ekvationen $0 = r^2 - r - 2 = (r+1)(r-2)$ har rötterna $r_1 = -1,\ r_2 = 2$. Motsvarande homogena differentialekvation $y'' - y' - 2y = 0$ har därför lösningen

$$y = y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

Eftersom högerledet i (IH) är ett förstagradspolynom ansätter vi som partikulärlösning $y = y_p = ax + b,\ y' = a,\ y'' = 0$ och får

$$x + 1 = 0 - a - 2(ax + b) = -2ax - (a + 2b), \quad -1 = 2a,\ -1 = a + 2b,$$

$$\implies \quad a = -\tfrac{1}{2},\ b = -\tfrac{1+a}{2} = -\tfrac{1}{4}, \qquad y_p = -\frac{2x+1}{4}.$$

Allmänna lösningen till (IH) ges därför av

$$y = y_p + y_h = -\frac{2x+1}{4} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

□

11. Avgör konvergensen hos serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\sqrt{n} + \ln n}{n^3 + \ln\left(n^4\right)}$$

Lösning. För att göra en uppskattning av storleksordningen av termen $a_n = \dfrac{n^2\sqrt{n} + \ln n}{n^3 + \ln(n^4)}$ så observerar vi först att $\ln(n^4) = 4\ln n$ och eftersom logaritmen växer långsammare än polynom så blir den dominerande termen i täljaren $n^2\sqrt{n}$ och den dominerande termen i nämnaren är n^3. Därför uppskattar vi att a_n har samma storleksordning som $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är divergent, eftersom den är en p-serie med $p = \dfrac{1}{2} < 1$. Vi undersöker därför kvoten

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{n}\left(n^2\sqrt{n} + \ln n\right)}{n^3 + 4\ln n} = \frac{n^3\left(1 + \frac{\ln n}{n^2\sqrt{n}}\right)}{n^3\left(1 + \frac{4\ln n}{n^3}\right)} = \frac{1 + \frac{\ln n}{n^2\sqrt{n}}}{1 + \frac{4\ln n}{n^3}} \longrightarrow 1, \text{ då } n \to \infty.$$

Eftersom $\dfrac{a_n}{b_n} \longrightarrow 1 > 0$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är divergent, så ger kvotformen av jämförelsesatsen (Gränstestet) att serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är divergent.

Svar. Serien är divergent. □

12. Låt $f(x) = 1 + 4x^3 + \ln\sqrt{x}, \quad x > 0$.
Visa att f är inverterbar samt bestäm $(f^{-1})'(5)$, dvs inversens derivata i punkten 5.

Lösning. Vi har $f(x) = 1 + 4x^3 + \ln\sqrt{x} = 1 + 4x^3 + \frac{1}{2}\ln x$ och $f'(x) = 12x + \frac{1}{2x} > 0$ för alla $x > 0$. Det följer att f är strängt växande, och alltså har f invers. Vi har $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(a)}$, där $f(a) = 5$. Eftersom $f(1) = 5$ så är $a = 1$, och vi får

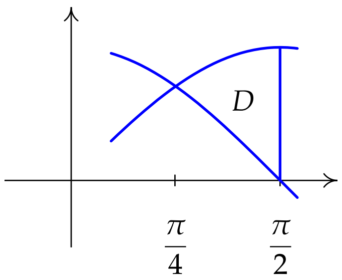
$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{25/2} = \frac{2}{25}.$$

□

Del B

13. Låt D vara området i xy-planet som ges av $\cos x \leq y \leq \sin x$, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Beräkna volymen av den kropp som genereras då D roterar kring
(a) x-axeln, (b) y-axeln.

Lösning. Börja med att skissa området D.



(a) Kroppen som bildas då D roteras kring x-axeln har enligt skivformeln volymen

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\, dx = -\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\, dx \\ &= -\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x\, dx = -\frac{\pi}{2}\left[\sin 2x\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2}(0-1) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(b) Vid rotation runt y-axeln använder vi skalformeln:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} x(\sin x - \cos x)\, dx = [\text{partiell integration}] \\ &= 2\pi\left[x(-\cos x - \sin x)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} + 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos x + \sin x)\, dx \\ &= 2\pi\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right) + 2\pi\left[\sin x - \cos x\right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \pi^2\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi(1-0) = \pi^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) + 2\pi. \end{aligned}$$

Svar. (a) $\frac{\pi}{2}$. (b) $\pi^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) + 2\pi$. □

14. Rita kurvan $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$. Bestäm extrempunkter och asymptoter.
Ange intervall där kurvan är konvex eller konkav.

Lösning. Eftersom $\lim_{x \to -1^+} y = \lim_{x \to -1^-} y = -\infty$ så är linjen $x = -1$ en lodrät asymptot nedåt på båda sidor. Med polynomdivision får vi $y = x - 2 + \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$. Eftersom $\lim_{x \to \pm\infty} (y - (x-2)) = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x+2}{x^2+2x+1} = 0$, så är linjen $y = x - 2$ en sned asymptot till kurvan. Derivering ger

$$y' = \frac{3x^2(x+1)^2 - x^3 \cdot 2(x+2)}{(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},$$

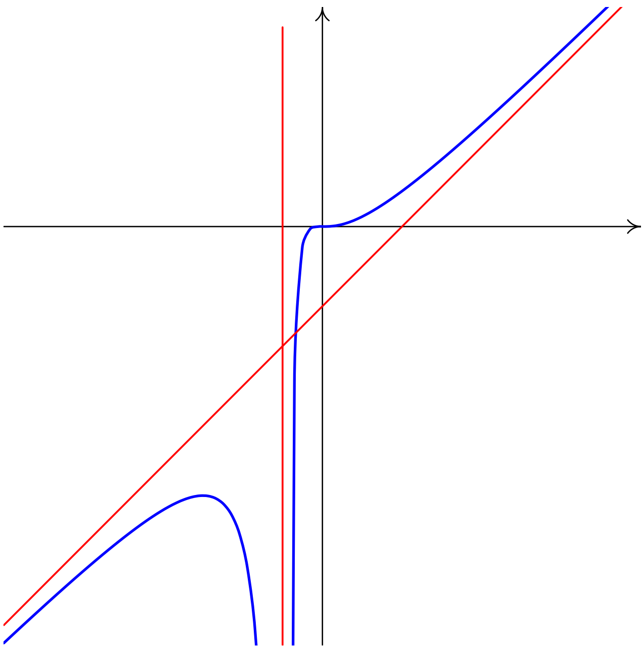
så de stationära punkterna är $x = 0$ och $x = -3$. Teckenstudietabell:

x		-3		-1		0	
y'	$+$	0	$-$	odef.	$+$	0	$+$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	odef.	$\nearrow$	terrass	$\nearrow$

Vi ser att $x = -3$ är en lokal maxpunkt med värde $y(-3) = -\dfrac{27}{4}$ och att $x = 0$ är en terrasspunkt med värdet $y(0) = 0$. Vi avslutar med att undersöka konvexitet. Derivatan kan skrivas $y' = (x^3 + 3x^2)(x+1)^{-3}$ som vi deriverar med produktregeln:

$$\begin{aligned} y'' &= (3x^2 + 6x)(x+1)^{-3} - 3(x+1)^{-4}(x^3 + 3x^2) \\ &= 3x(x+1)^{-4}\left((x+2)(x+1) - (x^2 + 3x)\right) = \frac{6x}{(x+1)^4}. \end{aligned}$$

Alltså är andraderivatan positiv för $x > 0$ och negativ för $x < 0$, vilket innebär att funktionen är konvex för $x > 0$ och konkav för $x < 0$.



$\square$

15. För funktionen f gäller att $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{x}$ för $x < 0$, medan $f(x) = ax + b$ för $x \geq 0$. Bestäm konstanterna a och b så att f blir kontinuerlig och deriverbar överallt.

Lösning. Funktionen är kontinuerlig och deriverbar för alla $x \neq 0$. Vi behöver undersöka $x = 0$. Funktionsvärdet vid $x = 0$ är b. Alltså krävs att $\lim_{x\to 0} f(x) = b$. Då högergränsvärdet redan är klart $= b$, så behöver vi undersöka vänstergränsvärdet. Eftersom

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0^-} 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$$

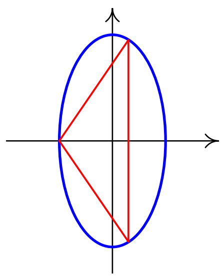
enligt ett känt standardgränsvärde, så krävs alltså $b = 3$.
För att undersöka deriverbarhet, observera att deriverbarhet medför kontinuitet, så vi vet redan att $b = 3$, och alltså att $f(0) = 3$. Vi undersöker differenskvoten från vänster sida, dvs $h < 0$.

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{\sin 3h}{h} - 3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sin 3h - 3h}{h^2} = [\text{Maclaurinutv.}]$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{3h - \frac{27h^3}{6} + \mathcal{O}(h^5) - 3h}{h^2} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\frac{27h}{6} + \mathcal{O}(h^3)}{1} = 0$$

Eftersom högerderivatan är a så krävs därför att $a = 0$.
Svar. För kontinuitet krävs $b = 3$. För deriverbarhet krävs $a = 0$ och $b = 3$. $\square$

16. En likbent triangel har hörnen på ellipsen $4x^2 + y^2 = 4$ så att spetsen (där de lika benen möts) ligger i punkten $(-1, 0)$. Bestäm största möjliga arean av en sådan triangel.

Lösning. Triangelns spets ligger i punkten $(-1, 0)$. Triangelns bas är $2y$, och dess höjd är avståndet mellan x och -1 på $x$axeln, och är därför $x + 1$. (Höjden är längs x-axeln.)



Den övre delen av ellipsen är funktionen $y = 2\sqrt{1 - x^2}$. För $-1 < x < 1$ får vi därför följande uttryck för arean av hela triangeln:

$$A(x) = \frac{2y(x+1)}{2} = y(x+1) = 2(x+1)\sqrt{1-x^2}.$$

Vi deriverar med produktregeln:

$$\begin{aligned} A'(x) &= 2\sqrt{1-x^2} + 2(x+1)\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-x^2) - 2x(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2(1-x-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-2x)(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-2x)\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}}. \end{aligned}$$

Stationära punkter är $x = \dfrac{1}{2}$ och $x = -1$. Teckenstudietabell:

x	-1		$1/2$	
$A'(x)$	0	$+$	0	$-$
$A(x)$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$

Arean blir alltså störst när $x = \dfrac{1}{2}$. Då blir arean $A(\dfrac{1}{2}) = 2 \cdot \dfrac{3}{2}\sqrt{3/4} = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$. $\square$