UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sigstam, Styf

Prov i matematik
ES, K, KandKemi, STS, X
ENVARIABELANALYS
2011-06-07

Skrivtid: 8.00 - 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogat formelblad. För betyget 3 krävs 18 poäng (av 24) på del A. För betyget 4 krävs 18 poäng på del A och 25 poäng totalt. För betyget 5 krävs 18 poäng på del A och 32 poäng totalt.

Del A

1. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = |x^3 - 8|$ i punkten där $x = 1$. (2)

2. Bestäm, om det existerar, gränsvärdet
$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\ \sin(x-2)}{x^2-4}. \qquad (2)$$

3. Partialbråksuppdela uttrycket $\dfrac{3x+2}{x^2-4}$. (2)

4. Bestäm alla primitiva funktioner till $\dfrac{3x+2}{x^2-4}$. (2)

5. Bestäm
$$\int_0^{\pi} x^2\ \sin x\, dx.$$
(2)

6. Beräkna integralen
$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+2x}. \qquad (2)$$

7. Ange definitionsmängden för funktionen $f(x) = \arctan\sqrt{x^2-1}$ samt bestäm dess derivata. (2)

8. Ange samtliga lösningar till differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = 0$. (2)

9. Lös den inhomogena differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}$ med begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 1$. (2)

10. Visa att funktionen $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$, $x > e$, är inverterbar. (2)

11. Låt f vara som i uppgift 10. Bestäm inversens derivata i punkten 1. (Dvs $g'(1)$, där $g = f^{-1}$, ska bestämmas.) (2)

12. Avgör om serien
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{3\sqrt{n} - n\sqrt{n} + 2n^2\sqrt{n}}. \qquad (2)$$
är divergent eller konvergent. (2)

Del B

13. Beräkna, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \, \sin x^2 - e^x + 1 + x}{\ln(1+x) - \arctan x} \tag{4}$$

14. Lös differentialekvationen $y' \, e^{y-x} = x$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 0$. (4)

15. Beräkna volymen av den kropp som uppstår när området

$$0 \le y \le \sqrt{\arcsin x}, \qquad 0 \le x \le 1$$

roteras kring x-axeln. (4)

16. Undersök kurvan

$$y = \tfrac{5}{4}\, x + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

med avseende på definitionsmängd, asymptoter, extrempunkter och konvexitet. Gör en kurvskiss. (4)

Trigonometriska formler

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x), \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + O(x^{2m+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + O(x^{2m+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + O(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + O(x^{n+1})$$