UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sigstam, Styf

Prov i matematik
ES, K, KandKemi, STS, X
ENVARIABELANALYS
2011-06-07

Svar till tentan

Del A

1. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = |x^3 - 8|$ i punkten där $x = 1$.

Svar. $y = 7 - 3(x - 1)$. □

2. Bestäm, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\,\sin(x-2)}{x^2-4}.$$

Svar. $\lim = 1$. □

3. Partialbråksuppdela uttrycket $\dfrac{3x+2}{x^2-4}$.

Svar.

$$\frac{3x+2}{x^2-4} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2}$$

□

4. Bestäm alla primitiva funktioner till $\dfrac{3x+2}{x^2-4}$.

Svar.

$$\int \frac{3x+2}{x^2-4}\,dx = C + 2\ln|x-2| + \ln|x+2|.$$

□

5. Bestäm

$$\int_0^{\pi} x^2\,\sin x\,dx.$$

Svar.

$$\int_0^{\pi} x^2\,\sin x\,dx = \pi^2 - 4.$$

□

6. Beräkna integralen

$$I = \int \frac{dx}{2\sqrt{x} + 2x}.$$

Svar. Med hjälp av substitutionen $u = \sqrt{x}$ fås

$$I = \int \frac{2u\,du}{2u + 2u^2} = \int \frac{du}{1+u} = C + \ln(1+u) = C + \ln(1+\sqrt{x}).$$

□

7. Ange definitionsmängden för funktionen $f(x) = \arctan\sqrt{x^2-1}$ samt bestäm dess derivata.

Svar. $D_f : |x| \geq 1.$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$ □

8. Ange samtliga lösningar till differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Svar. $y = e^{-x}\,(A\cos 2x + B\sin 2x).$ □

9. Lös den inhomogena differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}$ med begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 1$.

Svar. $y = \frac{1}{4}\,e^{-x} + e^{-x}\left(\frac{3}{4}\cos 2x + \sin 2x\right).$ □

10. Visa att funktionen $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$, $x > e$, är inverterbar.

Svar.

$$f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x - 1}} > 0$$

då $x > e$. Detta medför att f är strängt växande, vilket medför inverterbar. □

11. Låt f vara som i uppgift 10. Bestäm inversens derivata i punkten 1. (Dvs $g'(1)$, där $g = f^{-1}$, ska bestämmas.)

Svar. Vi har att $f(a) = 1 \Leftrightarrow a = e^2$. Detta ger

$$g'(1) = \frac{1}{f'(a)} = 2a\sqrt{\ln a - 1} = 2e^2.$$

□

12. Avgör om serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{3\sqrt{n} - n\sqrt{n} + 2n^2\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

är divergent eller konvergent.

Svar. Vi har

$$\frac{a_n}{b_n} \to \tfrac{1}{2}, \quad \text{där} \quad b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Då $\sum b_n$ konvergerar följer av ett jämförelsekriterium att $\sum a_n$ också konvergerar. □

Del B

13. Beräkna, om det existerar, gränsvärdet

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x \, \sin x^2 - e^x + 1 + x}{\ln(1+x) - \arctan x}$$

Svar. Med hjälp av maclaurinutveckling fås $L = -1$. $\square$

14. Lös differentialekvationen $y' \, e^{y-x} = x$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

Svar. $y = \ln\left(2 + x\,e^x - e^x\right)$. $\square$

15. Beräkna volymen V av den kropp som uppstår när området

$$0 \le y \le \sqrt{\arcsin x}, \qquad 0 \le x \le 1$$

roteras kring x-axeln.

Svar. Vi har

$$V = \int_{x=0}^{x=1} \arcsin x \, dx = \int_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} u \, \cos u \, du = \tfrac{\pi}{2} - 1.$$

$\square$

16. Undersök kurvan

$$y = \tfrac{5}{4}\, x + \sqrt{x^2 + 2x - 3} = f(x)$$

med avseende på definitionsmängd, asymptoter, extrempunkter och konvexitet. Gör en kurvskiss.

Svar. Då $x^2 + 2x - 3 \ge 0$ om och endast om $x \le -3$ eller $x \ge 1$ följer att $D_f =]-\infty, -3] \cup [1, \infty[$. För derivatorna har vi

$$f'(x) = \frac{5}{4} + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}} = \frac{5}{4} + (x+1)\,(x^2+2x-3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$f''(x) = -4\,(x^2+2x-3)^{-\frac{3}{2}} < 0$$

Ekvationen $f'(x) = 0$ har den unika lösningen $x = -\frac{13}{3}$ där vi har ett strikt lokalt maximum. Lokala minima har vi i intervalländpunkterna $x = -3$ och $x = 1$. Kurvan är strikt konkav. $\square$