UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sigstam, Styf

Prov i matematik
Alla program och fristående kurs
ENVARIABELANALYS
2011-08-22

Skrivtid: 14.00 - 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogat formelblad. För betyget 3 krävs 18 poäng (av 24) på del A. För betyget 4 krävs 18 poäng på del A och 25 poäng totalt. För betyget 5 krävs 18 poäng på del A och 32 poäng totalt.

Del A

1. Bestäm alla punkter P_0 på kurvan $y = x^2 + x + 1$ sådana att tangenten, till kurvan, i P_0 går genom origo. (2)

2. Bestäm, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{\ln x^2}. \qquad (2)$$

3. Partialbråksuppdela uttrycket $\dfrac{x+1}{x^3+x}$. (2)

4. Bestäm alla primitiva funktioner till $x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1-x}{x^2+1}$. (2)

5. Beräkna

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\, dx. \qquad (2)$$

6. Beräkna integralen

$$\int \frac{dx}{e^x + 1}.$$

genom användande av substitutionen $u = e^{-x}$. (2)

7. Avgör, med hjälp av en lämplig triangel, om det är sant att

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad x \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

8. Lös differentialekvationen $\quad y'' + y' = 0.$ (2)

9. Bestäm **en** lösning till differentialekvationen $\quad y'' + y' = 2x + e^{-x}.$ (2)

10. Lös differentialekvationen

$$y'' + y' = 2x + e^{-x}$$

under begynnelsevillkoren $\quad y(0) = y'(0) = 0.$ (2)

11. Visa att funktionen $\quad f(x) = x^{\frac{1}{x}}, x > e,\quad$ är inverterbar. (2)

12. Låt f vara som i uppgift 11. Bestäm inversens derivata i punkten $\sqrt{2}$. (Dvs bestäm $g'(\sqrt{2})$, där $g = f^{-1}$.) (2)

Del B

13. Lös differentialekvationen $xy' + 2y = \ln x$ med villkoret $y(1) = 1$. (4)

14. Bestäm, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{t\to 0} \frac{\left(e^{2t}-1\right)\,\sin t}{t\arctan t + \cos t - 1}$$

genom att Maclaurinutveckla de ingående funktionerna. (4)

15. Undersök kurvan

$$y = \frac{x^3+3x^2-4}{x^2+2x+1}$$

med avseende på definitionsmängd, asymptoter, extrempunkter och konvexitet. Gör en kurvskiss. (4)

16. Avgör för var och en av följande serier om den är konvergent eller divergent:

$$(a)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}\sin\frac{1}{k^2} \qquad\qquad (b)\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^k$$

(4)

Trigonometriska formler

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x), \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + O(x^{2m+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + O(x^{2m+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + O(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + O(x^{n+1})$$