UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sigstam, Styf

Prov i matematik
Alla program o frist kurs
ENVARIABELANALYS
2011-08-22

Svar till tentan 2011-08-22.

Del A

1 Bestäm alla punkter P_0 på kurvan $y = x^2 + x + 1$ sådana att tangenten, till kurvan, i P_0 går genom origo.

Svar. Tangenten till $y = f(x)$ i punkten $(a, a^2 + a + 1)$ har riktningskoefficient $2a + 1$. Då tangenten ska gå genom origo, blir dess ekvation $y = (2a + 1)x$. Tangenten ska också gå genom punkten $(a, a^2 + a + 1)$, vilket ger sambandet $a^2 + a + 1 = (2a + 1)a$, dvs $a^2 = 1$. $a = 1$ ger punkten $P_0 = (1, 3)$, och $a = -1$ ger punkten $P_0 = (-1, 1)$. $\square$

2 Bestäm, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{\ln x^2}.$$

Svar. Uttrycket är av typen $\frac{0}{0}$, så l' Hopitals regel går att använda. Man får svaret $-\frac{\pi}{2}$. $\square$

3 Partialbråksuppdela uttrycket $\dfrac{x+1}{x^3+x}$.

Svar. Faktorisera nämnaren $x^3 + x = x(x^2 + 1)$, och ansätt

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

där A, B och C är konstanter som ska bestämmas. Likheten ger sambandet $x + 1 = A(x^2 + 1) + x(Bx + C)$, som medför att $A = 1$, $B = -1$ och $C = 1$.
Svar. $\dfrac{x+1}{x^3+x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1-x}{x^2+1}$.

$\square$

4. Bestäm alla primitiva funktioner till $x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1-x}{x^2+1}$.

Svar. Skriv $\dfrac{1-x}{x^2+1}$ som $\dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{x}{x^2+1}$ och integrera termvis.
Svar: $C + \dfrac{x^2}{2} + \ln|x| + \arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$, (konstant C). $\square$

5. Beräkna
$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx. \tag{2}$$

Svar. $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$. (Använd partiell integration.)

$\square$

6. Beräkna integralen
$$\int \frac{dx}{e^x + 1}.$$
genom användande av substitutionen $u = e^{-x}$.

Lösning. Med den givna substitutionen får vi $du = -u\,dx$, dvs $dx = -\frac{du}{u}$. Vidare gäller $e^x = \frac{1}{u}$, så vi får:

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{-\frac{du}{u}}{\frac{1}{u} + 1} = -\int \frac{du}{1+u} = -\ln|1+u| + C = -\ln|1 + e^{-x}| + C.$$

Svar. $-\ln|1 + e^{-x}| + C$. $\square$

7. Avgör, med hjälp av en lämplig triangel, om det är sant att

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Lösning. Låt $t = \arctan x$. Då är $\tan t = x$, vilket illustreras i en rätvinklig triangel med kateterna 1 och x. En sådan triangel har hypotenusan $\sqrt{1+x^2}$, och i samma triangel utläser vi att $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. $\square$

8. Lös differentialekvationen $\quad y'' + y' = 0.$

Svar. $y = A + Be^{-x}$, där A och B är konstanter. (Den karakteristiska ekvationens rötter är 0 och -1.) $\square$

9. Bestäm **en** lösning till differentialekvationen $\quad y'' + y' = 2x + e^{-x}.$

Lösning. Vi söker en partikulärlösning y_P. Ansätt $y_P = Cx^2 + Dx + Exe^{-x}$, där C, D och E är konstanter. Detta ger $C = 1$, $D = -2$ och $E = -1$.
Svar. En partikulärlösning är $y_P = x^2 - 2x - xe^{-x}$.

$\square$

10. Lös differentialekvationen
$$y'' + y' = 2x + e^{-x}$$
under begynnelsevillkoren $\quad y(0) = y'(0) = 0.$

Lösning. Motsvarande homogena differentialekvation $y'' + y' = 0$ har lösningen $y_H = A + Be^{-x}$. (Uppgift 8). Den allmänna lösningen ges av

$$y = y_H + y_P = A + Be^{-x} + x^2 - 2x - xe^{-x}.$$

Insättning av begynnelsevärdena i y och i y' ger $A = 3$ och $B = -3$.
Svar. $y = x^2 - 2x + 3 - e^{-x}(x+3)$. □

11. Visa att funktionen $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, x > e,$ är inverterbar.

Lösning. Använd logaritmisk derivering. Då fås

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{1}{x^2}(1 - \ln x).$$

För $x > e$ så blir detta uttryck negativt, vilket innebär att funktionen är strängt avtagande i det efterfrågade intervallet. Därför är funktionen inverterbar där. □

12. Låt f vara som i uppgift 11. Bestäm inversens derivata i punkten $\sqrt{2}$. (Dvs bestäm $g'(\sqrt{2})$, där $g = f^{-1}$.)

Lösning. Sök först a så att $f(a) = \sqrt{2}$. Eftersom $\sqrt{2} = 2^{1/2}$ så har vi $a = 2$. Beräkna $f'(2)$:

$$f'(2) = f(2) \cdot \frac{1}{4} \cdot (1 - \ln 2) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \ln 2).$$

Nu gäller att

$$g'(\sqrt{2}) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{2\sqrt{2}}{1 - \ln 2}.$$

□

Del B

13. Lös differentialekvationen $xy' + 2y = \ln x$ med villkoret $y(1) = 1$.

Lösning. Ekvationen är linjär av första ordningen och löses med integrerande faktor. Skriv först ekvationen på formen $y' + y\frac{2}{x} = \frac{\ln x}{x}$. En primitiv funktion till $\frac{2}{x}$ är $2\ln x$ varför den integrerande faktorn (IF) blir $e^{2\ln x} = x^2$. Efter multiplikation med IF kan ekvationen skrivas

$$\frac{d}{dx}\left(yx^2\right) = x \ln x.$$

Därför gäller

$$yx^2 = \int x \ln x \, dx = [\ldots \text{partiell integration} \ldots] = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C,$$

och $y = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4} + \frac{C}{x^2}$. Villkoret $y(1) = 1$ medför att $C = \frac{5}{4}$.
Svar. $y = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4} + \frac{5}{4x^2}$.

□

14. Bestäm, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{t\to 0} \frac{\left(e^{2t}-1\right)\,\sin t}{t\arctan t+\cos t-1}$$

genom att Maclaurinutveckla de ingående funktionerna.

Lösning. Maclaurinutveckling av täljaren T ger

$$T=\left(t+\mathcal{O}(t^3)\right)\left(2t+\mathcal{O}(t^2)\right)=2t^2+\mathcal{O}(t^3),$$

och utveckling av nämnaren N ger

$$N=t\left(t+\mathcal{O}(t^3)\right)+1-\frac{t^2}{2}+\mathcal{O}(t^4)-1=\frac{1}{2}t^2+\mathcal{O}(t^4).$$

Förkorta med t^2 och bråket kan skrivas

$$\frac{T}{N}=\frac{2+\mathcal{O}(t)}{\frac{1}{2}+\mathcal{O}(t^2)}\longrightarrow\frac{2}{1/2}=4,\text{ då } t\to 0.$$

Svar. 4. □

15. Undersök kurvan

$$y=\frac{x^3+3x^2-4}{x^2+2x+1}$$

med avseende på definitionsmängd, asymptoter, extrempunkter och konvexitet. Gör en kurvskiss.

Lösning. Bråket kan faktoriseras

$$y=\frac{x^3+3x^2-4}{x^2+2x+1}=\frac{(x-1)(x+2)^2}{(x+1)^2}$$

och vi ser att funktionen är definierad för $x\neq -1$. Nära $x=-1$ (på båda sidor) är funktionsvärdena negativa. Gränsvärdena av funktionen då x närmar sig -1 blir $-\infty$. Alltså är linjen $x=-1$ en lodrät asymptot, neråt på båda sidor.
Med polynomdivision visas att $y=x+1-\dfrac{3x+5}{x^2+2x+1}$. Därför gäller att

$$y-(x+1)=-\frac{3x+5}{x^2+2x+1}\longrightarrow 0,\text{ då } x\to\pm\infty.$$

Alltså är linjen $y=x+1$ en sned asymptot åt båda håll.
Derivering m hj a kvotregeln ger

$$y'=\frac{(x+2)(x^2+x+4)}{(x+1)^3}.$$

Faktorn x^2+x+4 saknar reella nollställen, så $y'=0\iff x=-2$. Teckenstudietabellen behöver innehålla punkterna -2 (derivatans nollställe) och $x=-1$ (punkt där funktionen är odefinierad). Teckenstudietabell:

x		-2		-1	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2+x+4	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x+1)^3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y'	$+$	0	$-$	odef.	$+$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	odef.	$\nearrow$

Funktionen har ett lokalt max vid $x = -2$, med värdet $y = 0$.
För att undersöka konvexitet deriverar vi en gång till. Efter förkortningar får man

$$y'' = -6 \cdot \frac{x+3}{(x+1)^4},$$

så $y'' = 0 \iff x = -3$. För $x < -3$ gäller att $y'' > 0$, så kurvan är konvex där. För $x > -3$ gäller att $y'' < 0$, så i både intervallet $(-3, -1)$ och i intervallet $(-1, \infty)$ är kurvan konkav. □

16. Avgör för var och en av följande serier om den är konvergent eller divergent:

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \sin \frac{1}{k^2} \qquad\qquad (b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k} \right)^k$$

Lösning. (a) När k är stort så är $\frac{1}{k}$ nära 0, och för h nära 0 gäller att $\sin h \approx h$. Vi har $a_k = \sqrt{k} \sin \frac{1}{k^2} \approx \sqrt{k} \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^{3/2}}$, varför vi provar att jämföra med serien $\sum b_k$ där $b_k = \frac{1}{k^{3/2}}$. Denna serie är konvergent (p-serie) eftersom $\frac{3}{2} > 1$. Vi måste undersöka kvoten $\frac{a_k}{b_k}$.

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\sqrt{k} \sin \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^{3/2}}} = k^2 \sin \frac{1}{k^2} = \frac{\sin \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}} \longrightarrow 1,$$

enligt ett känt standardgränsvärde, då $k \longrightarrow \infty$. Eftersom $\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = 1 < \infty$ och $\sum b_k$ är konvergent, så följer nu att $\sum a_k$ är konvergent.
(b) För termen a_k gäller (med ett standardgränsvärde)

$$a_k = \left(\frac{k-1}{k} \right)^k = \left(1 - \frac{1}{k} \right)^k \longrightarrow e^{-1} = \frac{1}{e}, \text{ då } k \longrightarrow \infty.$$

Eftersom termerna inte går mot 0, så måste serien vara divergent.
Svar. (a) Konvergent. (b) Divergent. □