Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Cecila Karlsson

Tentamen
ENVARIABELANALYS
2010-12-10

SVAR OCH ANVISNINGAR

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{xe^x - xe^{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x^2 + \ldots) - (1 - x^2 + \ldots)}{x(1 + x + \ldots) - x(1 - x + \ldots)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + \ldots}{2x^2 + \ldots} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + \ldots}{2 + \ldots} = 1.$$

Även en beräkning som stöder sig på en metod uppkallad efter en viss fransk markis godtas.

2. Eftersom funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på $0 \le x < \infty$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ och det finns en punkt x där $f(x) > 0$ så har funktionen ett största värde enligt en sats i Adams Calculus. Det största värdet finns i detta fall i en punkt x_0 där antingen $f'(x_0) = 0$, dvs i en kritisk punkt, eller där $f'(x_0)$ inte existerar , dvs i en singulär punkt. Några singulära punkter finns inte på intervallet.

$$f'(x) = e^{-x}(-(-e^{-x})) + (-e^{-x})(1 - e^{-x}) = e^{-x}(2e^{-x} - 1).$$

Den enda kritiska punkten på intervallet är alltså $x_0 = \ln 2$ och det största värdet är $= \frac{1}{4}$.

Alternativ metod med kvadratkomplettering

$$e^{-x}(1 - e^{-x}) = -(e^{-2x} - e^{-x}) = -((e^{-x} - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}) = -(e^{-x} - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \le \frac{1}{4}$$

med likhet om och endast om $x = \ln 2$.

3.

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x} = \left[\ln x = u,\ \frac{1}{x}\,dx = du\right] = \int_1^\infty \frac{du}{u^2} = \left.\frac{-1}{u}\right|_1^\infty = 1.$$

Alternativt partiell integration

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x} = \ln x \left.\frac{1}{\ln^2 x}\right|_e^\infty - \int_e^\infty \ln x(-2)\frac{dx}{x\ln^3 x} = \left.\frac{1}{\ln x}\right|_e^\infty + 2\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}.$$

Nu har vi fått tillbaka den ursprungliga integralen multiplicerad med 2. Vi kan därför uttrycka den som $-\left.\frac{1}{\ln x}\right|_e^\infty = 1$.

4. Vi undersöker först intervallet $1 < x < \infty$. Eftersom $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ och det finns en punkt där $f(x) > 0$ har den kontinuerliga funktionen $f(x)$ ett största värde på intervallet enligt en sats i Adams Calculus. Detta återfinns antingen i en kritisk punkt x_0, dvs där $f'(x_0) = 0$ eller i en singulär punkt. Vi har inga singulära punkter.

$$f'(x) = 2(x-1)e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{3}(x-1)^2 e^{-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}(x-1)(7-x).$$

Den enda kritiska punkten på intervallet är därför $x_0 = 7$ och det största värdet på $1 < x < \infty$ är alltså $\frac{36}{e^{\frac{7}{3}}}$.

Vi undersöker nu $f(x)$ på det slutna intervallet $0 \le x \le 1$ på vilket det finns ett största värde då $f(x)$ är kontinuerlig. Eftersom funktionen inte har någon kritisk eller singulär punkt i det inre av intervallet har funktionen sitt största värde i en ändpunkt, dvs $f(0) = 1$ måste vara det största värdet på $0 \le x \le 1$. Om vi nu jämför de största värdena på intervallen $0 \le x \le 1$ samt $1 < x < \infty$ finner vi att funktionens största värde är lika med $\frac{36}{e^{\frac{7}{3}}}$ eftersom

$$\frac{36}{e^{\frac{7}{3}}} > \frac{36}{3^3} = \frac{36}{27} > 1.$$

Vi har utnyttjat att $e < 3$ samt att e^x är strikt växande.

5. Partiell integration ger

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx = x(-\cos x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)\, dx = \pi + \int_0^\pi \cos x \, dx =$$

$$= \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

6. Definitionsområdet är $x \neq 1$. Funktionens nollställe är dubbelt, nämligen $x = -1$.

Vertikal asymptot är $x = 1$ ty $\lim_{x \to 1+} y = +\infty$ och $\lim_{x \to 1-} -\infty$.

$\lim_{x \to \pm\infty} (y(x) - (x+3)) = 0 \pm$. Linjen $y = x + 3$ är alltså sned asymptot.

$y' = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}$ som har nollställena $x = 3$ och $x = -1$. Eftersom $\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ är $x = 3$ en lokal minimipunkt enligt en sats i Adams Calculus. På samma sätt kan man motivera att $x = -1$ ger en lokal maximipunkt som ju är lika med nollstället.

7. Den homogena ekvationen $y'' + y = 1$ har karakteristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$ med rötterna $r_1 = i$ och $r_2 = -i$ så lösningarna till homogena ekvationen är

$$y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

För att bestämma en partikulärlösning y_P till den inhomogena ekvationen $y'' + y = 1$ ansättes $y_P = A$. Derivering och insättning ger $A = 1$ så den allmänna lösningen till den givna ekvationen ges av

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1.$$

Man finner slutligen att villkoret $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ ger $C_1 = -1$, $C_2 = 0$ så lösningen är $y = 1 - \cos x$.

8. En integrerande faktor är e^{-x^2}. Efter multiplikation av ekvationen med denna erhålles ekvationen $(e^{-x^2} y)' = 2xe^{-x^2}$ som ger $e^{-x^2} y = -e^{-x^2} + C$ så allmänna lösningen är $y = Ce^{x^2} - 1$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger lösningen

$$y = e^{x^2} - 1.$$

9. Serien är geometrisk med kvoten $r = -x^2$. Summan är därför $\dfrac{1}{1 - (-x^2)} = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

10. Då konvergensradien är lika med 2 divergerar serien för alla x för vilka $|x| > 2$ och konvergerar absolut för alla x för vilka $|x| < 2$. Då $x = 2$ har vi serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ som divergerar (p-serie). För $x = -2$ har vi den alternerande serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ som konvergerar enligt alternerande serietestet, dock endast villkorligt (conditional convergence).

PROBLEM

1. Tangenten genom $P = (a, (a+1)^2)$ och $Q = (b, -(b-1)^2)$ på respektive parabel har lutningen
$$\frac{(a+1)^2 + (b-1)^2}{a-b}.$$
Derivatorna ger att lutningen också kan uttryckas som $2(a+1)$ och $-2(b-1)$, dvs
$$2(a+1) = -2(b-1) \text{ eller } a = -b.$$
Vi utnyttjar att $b = -a$ samt att
$$\frac{(a+1)^2 + (b-1)^2}{a-b} = 2(a+1).$$
Detta ger dels $a = -1$, $b = 1$, som ger tangeringspunkten
$$P = (-1, 0) \text{ respektive } Q = (1, 0),$$
dels $a = 1$, $b = -1$, som ger tangeringspunkten
$$P = (1, 4) \text{ respektive } Q = (-1, -4).$$

2. a)
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \ln|x| = 0$$
enligt standardgränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0+} x^a \ln x = 0, a > 0.$

b)
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \ln|x| = 0.$$

c) Funktionen är jämn så det räcker att studera $y = x^2 \ln x, x > 0$ och spegla med avseende på y-axeln. För $x > 0$ får vi $y' = 2x\ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$. Derivatans enda nollställe för $x > 0$ är $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ som ger (lokala) minimipunkten $y = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{e}$. Man kan här t ex motivera med derivatans teckenväxling. Vi observerar också att $f(x) = 0$ för $x = 0, \pm 1$.