UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Anders Vretblad/Bo Styf

Endimensionell analys

för civilingenjörsprogrammen

LÄSANVISNINGAR

till Adams: Calculus, sjätte upplagan

Version 2007

Till räkneövning nr 1

För att träna upp förmågan att lösa »tillämpade« problem kommer ni till en del räkneövningar att uppmanas att fundera på ett sådant. Det behöver inte direkt ha att göra med den del av kursen som vi håller på med just där.

Till denna gång ger vi det här problemet. Försök åtminstone att *formulera* det som ett matematiskt problem. Under räkneövningen kan ni diskutera det med läraren. Lösningen kräver ingen matematik som ni inte har hört talas om i gymnasieskolan.

Problem. Genom punkten $(4, 0)$ dras en rät linje, som tillsammans med x-axeln och linjen $4x - y + 8 = 0$ bildar en triangel med arean 12. Bestäm ekvationen för denna räta linje.

Här har ni en ganska allmänt formulerad lathund för sådana här situationer.

LÖSNING AV TILLÄMPADE PROBLEM

1. Läs igenom problemet noga, gärna flera gånger, för att få en klar bild av vad man känner till och vad som är sökt.
2. Rita en figur (om det överhuvudtaget är möjligt).
3. Inför beteckningar för alla relevanta storheter. En del av storheterna är variabla, andra kan vara konstanta. *Många gånger är det bättre att beteckna även de konstanta med bokstäver, eftersom lösningen då blir lättare att förstå, än om man sätter in siffervärden på ett alltför tidigt stadium.*
4. Skriv upp de *samband* som råder mellan införda storheter. Detta innebär att man gör en *matematisk modell*, som beskriver situationen.
5. Tänk nu efter vilken sorts matematik som kan användas för att lösa problemet. Är det ett extremvärdesproblem? Eller vad? *Formulera* det givna problemet som ett matematiskt problem.
6. Lös det matematiska problemet.
7. *Tolka* den erhållna lösningen, dvs återvänd till problemets ursprungliga formulering och formulera ett *svar*.
8. Tänk efter om svaret är *rimligt:* stämmer det med vad sunda förnuftet och erfarenheten säger?

Kapitel 1 handlar om det matematiska begrepp som karakteriserar den matematiska *analysen*, nämligen *gränsvärde*. Olika typer av gränsvärden används för att definiera saker som kontinuitet, derivata, integral m.m.

Läs igenom avsnitt 1.1. Ni har nog sett saker som liknar **Ex. 1–3** i gymnasieböckerna. Resonemanget om cirkelns area härstammar från Archimedes (200-talet f.v.t.).

I avsnitt 1.2 definieras den första typen av gränsvärde. Tänk noga efter vad som står i den inramade definitionen på sidan 63. I den svenska översättningen förekommer de två uttrycken »godtyckligt nära« och »tillräckligt nära«. Tänk igenom vilken roll dessa fraser spelar i själva definitionen!

En del av exemplen och övningarna på avsnitt 1.2 kan tyckas ganska triviala och innehållslösa. Det beror på att Adams inte arbetar med särskilt många typer av funktioner än så länge. Det kommer mer spännande exempel på gränsvärden senare.

Läs i alla fall igenom avsnittet, och notera särskilt vad som händer i **Ex. 2** och **4–11**.

Räknereglerna i Theorem 2–4 accepterar vi tills vidare utan bevis.

Övningarna på sid. 68–70 är väldigt många, men många av dem är inte så svåra. Räkna en ordentlig dos av dem! Exempelvis följande: **7, 11, 13, 21, 23, 25, 27, 31–33, 57–60, 75, 78.** Ledning till 32: sätt $x = t^3$.

I avsnitt 1.3 handlar det först om gränsvärden då en variabel går mot oändligheten. Observera att »oändligheten« inte är något matematiskt *objekt*. När ordet används, är det för att markera att det inte finns någon begränsning (åt höger, eller åt vänster, eller vad det nu handlar om i sammanhanget). Definition 3 på sid. 71 innehåller också orden »godtyckligt« och »tillräckligt«. Tänk återigen efter vilka roller de spelar i definitionen!

Läs igenom **Ex. 1–5** (liknande exempel bör också ha givits på föreläsningen). I anslutning till **Ex. 2**: om man ska beräkna ett gränsvärde då $x \to -\infty$, är det ofta en god idé att sätta $x = -t$ och istället låta $t \to +\infty$. (Det är mestadels mindre riskabelt att räkna med positiva tal än med negativa!) I **Ex. 3** visas en mycket användbar metod för att beräkna gränsvärde av en *kvot*: man bryter ut den *dominerande* termens »storleksordning« ur täljare och nämnare, och förkortar sedan:

$$\frac{2x^2 - x + 3}{3x^2 + 5} = \frac{x^2\left(2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(3 + \dfrac{5}{x^2}\right)} = \frac{2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}}{3 + \dfrac{5}{x^2}} \longrightarrow \frac{2 - 0 + 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}.$$

På liknande sätt kan man göra i **Ex. 4**:

$$\frac{5x + 2}{2x^3 - 1} = \frac{x\left(5 + \dfrac{2}{x}\right)}{x^3\left(2 - \dfrac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{5 + \dfrac{2}{x}}{2 - \dfrac{1}{x^3}} \longrightarrow 0 \cdot \frac{5 + 0}{2 - 0} = 0 \cdot \tfrac{5}{2} = 0.$$

Notera också i **Ex. 5** hur man ibland kan hantera ett gränsvärde av formen »$\infty - \infty$«. Man måste skriva om det på något sätt för att få grepp om det. **Lös övningarna 3, 5, 6, 7, 9, 10 på sidan 75.**

Andra halvan av avsnitt 1.3 handlar om »oändliga gränsvärden« eller (som vi brukar säga i Sverige) *oegentliga* gränsvärden. **Ex. 6–10** sid. 73–74 visar på ett antal olika fall av detta. Begreppet *asymptot* återkommer också senare i kursen i andra situationer.
Övningar på sid. 75–76: 15, 23, 30, 31. Titta också på **övning 47–52.**

Till räkneövning nr 2

Ännu ett problem om räta linjer.

Problem. En rektangel $AOBC$ med variabla sidor men fixerad omkrets ($= 2a$) har sidorna OA och OB utefter de positiva koordinataxlarna. Från hörnet C dras en normallinje till diagonalen AB. Visa att denna passerar genom punkten (a, a).

Läs igenom avsnitt 1.4. Här finns många viktiga och användbara idéer. Definitionerna på sid. 77–78 är variationer på ett och samma tema. **Ex. 1–6** illustrerar definitionerna, och det är meningen att de skall kännas naturliga. Lite mer djupsinnigt är **Ex. 7**.

Sats 8 (»max-min-satsen«) är mycket viktig. Den kommer att användas flitigt när vi kommer till problemlösning i kapitel 3 och senare. Läs och begrunda **Ex. 9**. (Avsnittet om grafisk bestämning av max och min kan ni hoppa över.) Sats 9 (»satsen om mellanliggande värden«) kan tyckas självklar, men den är mycket användbar. **Ex. 10** är inte så överraskande, men **Ex. 11** och **12** är värdefulla. Likaså den avslutande anmärkningen på sidan 87. **Gör följande övningar på sid. 85–86: 1–3, 5, 7, 13, 17, 19, 29, 30.**

Avsnitt 1.5 innehåller mer precisa formuleringar av gränsvärdesdefinitionerna. Dessa är nödvändiga om man skall göra logiskt hållbara bevis för satser om gränsvärden, t.ex. räknereglerna i avsnitt 1.2. Avsnittet får betraktas som överkurs, men den som är lite mer teoretiskt intresserad kan gärna titta närmare på det.

Det fall som är lättast att förstå är nog det som behandlas i definition 11: gränsvärde då variabeln går mot oändligheten. Läs **Ex. 6**!

Observera den logiska strukturen i gränsvärdesdefinitionen. När jag säger att

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L,$$

så gör jag följande *utfästelse:*

> *Jag lovar härmed, att om någon kommer och presenterar ett positivt tal ε för mig, så kan jag alltid svara med ett tal R som har egenskapen:* **för alla x, som är större än R, är avståndet mellan $f(x)$ och L mindre än ε.** (Och det spelar ingen roll hur litet ε är, bara det är positivt!)

För att kunna använda definitionen måste man ha gissat sig till vad talet L ska ha för värde, dvsman måste gissa vad gränsvärdet är innan man kan verifiera det.

I följande exempel har vi ett gränsvärde då x ska gå mot både $+\infty$ och $-\infty$.

Exempel. Undersök $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, då $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{x^2+1}$.

Lösning: Om man prövar med stora värden på x ser man att värdena verkar ligga nära 2. Vi uppskattar avståndet mellan uttrycket och talet 2:

$$\begin{aligned} |f(x)-2| &= \left|\frac{2x^2+3x}{x^2+1} - 2\right| = \left|\frac{2x^2+3x-2(x^2+1)}{x^2+1}\right| = \frac{|3x-2|}{x^2+1} \le \frac{3|x|+2}{x^2+1} \\ &\overset{(*)}{\le} \frac{3|x|+|x|}{x^2+1} \le \frac{4|x|}{x^2} = \frac{4}{|x|}. \end{aligned}$$

Olikheten $(*)$ gäller så snart $|x| \ge 2$. Det sista uttrycket är lätt att ta hand om. Om ε är ett positivt tal, vilket som helst, så gäller att

$$\frac{4}{|x|} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x| > \frac{4}{\varepsilon}.$$

Om vi sätter $R_0 = 4/\varepsilon$ och $R = \max(2, R_0)$ (för att ta hand om olikheten $(*)$), så har vi

$$\text{så snart } |x| > R, \text{ så gäller att } |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

Detta betyder att har verifierat att det aktuella gränsvärdet existerar och är lika med 2. □

Den som är intresserad av hur det här fungerar kan försöka att göra samma sak med t.ex. **övning 29 på sid. 91.**

Till räkneövning nr 3

Nu ska ni börja studera kapitel 2. Avsnitt 2.1 är en förberedelse för definitionen av derivata. Det handlar om hur en tangent till en kurva borde se ut. Några engelska ord: *cusp* brukar kallas *spets* på svenska; *slope* översätts med *lutning*. Det engelska ordet *tangent* kan dessutom vara adjektiv: »the straight line tangent to the given curve« kan översättas »den räta linjen som tangerar den givna kurvan«. Läs igenom avsnittet och öva på **problem 3, 7, 15, 21, 23 på sid. 98.** Av dessa är 15 lite knepigare.

I avsnitt 2.2 kommer derivatan på allvar. De flesta exemplen handlar om funktioner som ni bör känna till. Man kan redan här notera *approximationsegenskapen:*

Att f är deriverbar för $x = x_0$ är ekvivalent med följande: Det existerar ett tal A och en funktion $\varrho(h)$ så att man har

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + h\varrho(h) \quad \text{och} \quad 0 = \varrho(0) = \lim_{h\to 0} \varrho(h).$$

Talet A visar sig vara derivatan $f'(x_0)$. Termen $h\varrho(h)$ är »felet« då man approximerar $f(x_0 + h)$ genom att gå längs tangentlinjen i stället för att gå längs grafen av f. Poängen med detta »fel« är att det går mot noll då $h \to 0$ snabbare än h självt. Detta uttrycker i formelform den geometriska innebörden av att en kurva har en tangent: linjen genom punkten $(x_0, f(x_0))$ med lutningen A är en »bättre« approximation till kurvan än alla andra linjer.

Stycket »Derivatives have the Intermediate-Value Property« kan ni hoppa över. Gör några **övningar på sid. 105–106: 1–6, 43.**

I avsnitt 2.3 har vi deriveringsreglerna för summa, produkt, kvot osv. Framför allt torde regeln för kvot vara ny för många av er. Läs igenom hela avsnittet och öva på (åtminstone) **övningarna 11, 13, 17, 25 på sid. 113.** Tänk på att man kanske kan skriva om uttrycket innan man deriverar, för att förenkla räkningarna! (Många av övningarna här blir dessutom enklare när man har tillgång till den allmänna kedjeregeln, som kommer i nästa avsnitt.)

Observera att det ofta kan vara idé att skriva om en kvot till en produkt, som i följande exempel:

Exempel. Bestäm derivatan av $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{(x+1)^4}$.

Lösning: Skriv $f(x) = (x^2 - 2)(x+1)^{-4}$, så ger regeln för derivering av en produkt att

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(x+1)^{-4} + (x^2-2)(-4)(x+1)^{-5} = (x+1)^{-5}\Big(2x(x+1) + (x^2-2)(-4)\Big) \\ &= \frac{2x^2 + 2x - 4x^2 + 8}{(x+1)^5} = \frac{8 + 2x - 2x^2}{(x+1)^5}. \end{aligned}$$

Jämför med hur invecklat det blir om man försöker med regeln för en kvot istället! □

Avsnitt 2.4 om kedjeregeln ger grunden till derivering av alla mer komplicerade funktioner. Så snart en funktion är sammansatt av sådana »delmoment« som man kan derivera, så kan man också derivera den sammansatta funktionen. Till en början kan det underlätta att införa hjälpbokstäver, som i **Ex. 1–2**, men snart lär man sig att klara sig utan dem. Läs avsnittet noga, studera exemplen. En sammansatt funktion kan vara sammansatt i många steg efter varandra!

På sid. 118 räknar ni övningarna 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 18, 22, 23, 25. Uttryck som innehåller belopp blir vanligen enklare att derivera om man först skriver om dem i olika definitionsintervall.

Till räkneövning nr 4

Problem. I en triangel ABC är sidan AB 4 cm, sidan AC 5 cm och sidan BC 6 cm. Visa (utan tabell eller räknare) att vinkeln A är exakt dubbelt så stor som vinkeln C.

Avsnitt 2.5: Derivatorna av sin och cos har ni nog sett tidigare. Nu tillkommer tan och cot (medan sec och csc kan hoppas över). Observera att derivatorna av tan och cot kan skrivas på flera sätt:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x.$$

Skumma igenom texten i avsnitt 2.5 och gör **övningarna 2, 3, 5, 7, 9, 13, 17, 21, 27, 29, 31, 45, 49 på sid. 123 f.** (Obs.: på grund av att det finns en massa trigonometriska formler händer det ibland att man får ett svar som inte stämmer med facit, trots att det är rätt! Man kan få olika utseende på svaret, om man räknar på olika sätt. Tänk därför efter om det inte går att transformera ditt svar genom att använda »trigonometriska ettan«, eller någon formel för dubbla vinkeln, eller. . .)

I avsnitt 2.6 presenteras medelvärdessatsen. Det är den sats som gör derivatan användbar: den ligger bakom alla de välkända sambanden mellan derivatans tecken och funktionens växande osv.

I avsnitt 2.6 ska ni läsa allt utom **Ex. 2–3** och sats 16. Man kan formulera sats 11 så att den gäller även om $b < a$:

Sats 11. Låt a och b vara (olika) två reella tal. Antag att f är deriverbar överallt mellan a och b och kontinuerlig på det slutna intervallet med ändpunkter a och b. Då finns ett c, som ligger mellan a och b, så att

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Beviset blir detsamma som i boken: om $b < a$ låter man bara a och b byta roller i resonemanget.

Satsen kan användas till undersökning av gränsvärden:

Exempel. Beräkna $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Lösning: Sätt $f(x) = \sqrt{1+x}$. Täljaren i uttrycket kan då skrivas som $f(x) - f(0)$. Vidare är $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$. Använd medelvärdessatsen med $a = 0$ och $b = x$, så blir

$$f(x) - f(0) = (x - 0)f'(c) = x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+c}},$$

där $c = c(x)$ ligger mellan 0 och x. Detta ger

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{1+c}} \to \frac{1}{2\sqrt{1}} = \tfrac{1}{2} \text{ då } x \to 0.$$

I själva gränsövergången använder vi att kvadratsrotsfunktionen är kontinuerlig. □

Terminologin i definition 5 sid. 127 är inte helt lyckad. Vi bör hålla oss till det normala uttryckssättet, som ser ut så här:

Antag att f är definierad på ett intervall I, och att x_1 och x_2 är två punkter i I.
(a) Om $f(x_2) > f(x_1)$ så snart $x_2 > x_1$, säger vi att f är **strängt växande** på I.
(b) Om $f(x_2) < f(x_1)$ så snart $x_2 > x_1$, säger vi att f är **strängt avtagande** på I.
(c) Om $f(x_2) \geq f(x_1)$ så snart $x_2 > x_1$, säger vi att f är **växande** på I.
(d) Om $f(x_2) \leq f(x_1)$ så snart $x_2 > x_1$, säger vi att f är **avtagande** på I.

*Observera att dessa **definitioner** inte har ett skvatt att göra med derivatan av f. De handlar bara om att jämföra funktionsvärden i olika punkter!!!* Sats 12 handlar sedan om hur derivatan (när den existerar) kan användas för att undersöka om f är växande eller avtagande osv.

I sats 12 kan man skärpa resultatet något: om $f'(x) = 0$ i ändligt många punkter och $f(x) > 0$ för övrigt, så är f fortfarande strängt växande. Ett exempel på detta är $f(x) = x^3$. Motsvarande gäller för strängt avtagande. Sats 13 är också viktig.

Idéerna i detta avsnitt kan ofta användas när man vill bevisa *olikheter.* Adams **Ex. 2–3** kan ersättas med följande:

Påstående: $\sin x < x$ för alla $x > 0$.

Bevis: Sätt $f(x) =$ en differens mellan leden i påståendet, t.ex. $f(x) = x - \sin x$. Då gäller ju att $f'(x) = 1 - \cos x$, vilket är ≥ 0 för alla x, med likhet bara för de enstaka värdena $x = n \cdot 2\pi$, där n är heltal. Det betyder att f är strängt växande på hela $\mathbf{R}$. Speciellt gäller för $x > 0$ att $f(x) > f(0)$, dvs. $x - \sin x > 0$, vilket är detsamma som att $\sin x < x$, vilket skulle bevisas. □

Påstående: För $x > 0$ gäller att $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2}$.

Bevis: Sätt $f(x) =$ differensen mellan vänsterled och högerled i påståendet, dvs. $f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x$. Då är $f(0) = 0$. Vidare gäller

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}}.$$

För $x > 0$ är ju $\sqrt{1+x}$ säkert ett tal som är större än 1, och av detta följer att $f'(x) < 0$ för $x > 0$. Men det betyder att f är strängt avtagande i intervallet $x \geq 0$, så att för $x > 0$ gäller säkert $f(x) < f(0) = 0$. Men att $f(x) < 0$ är ju ekvivalent med det som skulle bevisas, och påståendet är alltså sant. □

Enklaste beviset av den sista olikheten fås kanske genom att man jämför *kvadraterna* på olikhetens båda led. Visa själv att olikheten också gäller för $-1 \leq x < 0$.

Räkna **övningar på sid. 131: nummer 2, 5, 6, 9, 11.**

Blandade problem 1

Nu sammanfattar och repeterar vi det som kursen hittills handlat om. Försök lösa följande problem, som är av samma svårighetsgrad som tentamensproblem.

1. a) Lös ekvationen $2\sin x = \tan 2x$.
   b) Lös ekvationen $\ln(e^x + e^{x+1}) = 1$.

2. Låt funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vara definierad av

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-4} - |x-1| & \text{då } |x| > 2, \\ ax + b & \text{då } |x| \leq 2. \end{cases}$$

   Bestäm konstanterna a och b så att f blir kontinuerlig.

3. Visa att funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, där

$$f(x) = x^2|x|, \quad -\infty < x < \infty,$$

   är två gånger deriverbar men inte tre gånger deriverbar i origo.

4. Undersök kontinuitet och deriverbarhet i origo av de funktioner f och g som definieras av att $f(0) = g(0) = 0$ och

$$f(x) = x\sin\frac{1}{x} \quad \text{resp.} \quad g(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$$

   för $x \neq 0$. Undersök också om ev. derivator är kontinuerliga.

5. Bestäm gränsvärdena

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 64} \frac{x^{1/3}-4}{x^{1/2}-8}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x-1|-|x+1|}.$$

6. *Låt f vara en reellvärd funktion definierad på ett intervall I, och antag att det finns en konstant $K > 0$ sådan att $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|^2$ för alla $x_1, x_2 \in I$. Vad kan man då säga om f? Bevisa ditt påstående!

Till räkneövning nr 5

Problem. Bestäm ekvationen för den räta linje genom origo, som tangerar kurvan $y = x^3 + 2$.

Avsnitt 2.7 innehåller enkla tillämpningar av derivator. Den första, »Approximating small changes«, är en direkt tillämpning av »approximationsegenskapen« (inramad ovan i samband med avsnitt 2.2). Resten kan ni dock hoppa över just nu, det återkommer i kapitel 4 och i senare kurser i utbildningen. Gör **övning 7 och 8 på sidan 136.**

Högre derivator i 2.8 är knappast något svårt. **Räkna övningarna 5, 9, 15, 19 på sidan 140.** (För nummer 9: Kom ihåg att derivatan av $\tan x$ kan skrivas på flera sätt! Välj ett som ger enkla räkningar!)

Läs avsnitt 2.9 om implicit derivering. **Ex. 1–5** visar olika aspekter av saken. **Ex. 6** och »The general power rule« är mindre viktiga. Lös **övningarna 3, 5, 9, 11 på sid 145**. Här kan man få svar som inte stämmer med facit, om man räknar på ett annat sätt än det som Adams har tänkt sig. Hur kan det komma sig?

Avsnitt 2.10 hoppar vi över nu. Avsnitt 2.11 kan ni läsa igenom, om ni vill, men det handlar om saker som kommer att tas upp i den första mekanikkursen.

Nu är det dags att gå in i kapitel 3. Enligt rubriken handlar det om *transcendenta funktioner*. Detta är sådana funktioner som inte är bildade genom sammansättning av ändligt många operationer av typerna addition/subtraktion, multiplikation, division och potenser (med rationella exponenter). Några sådana funktioner har vi redan sett till: de trigonometriska. Men det finns många fler!

3.1: Det viktigaste här är definition 2 och formeln för derivatan av invers funktion. I princip bestämmer man den inversa funktionen till $y = f(x)$ genom att lösa ut x ur denna ekvation (och sedan evbyta bokstäver). (Men i realiteten är det långtifrån alltid som man verkligen *kan* lösa ekvationen.) **Lämpliga övningar är 9, 11 och 34, sid. 167.**

3.2: Det som står i detta kapitel har ni kanske nosat på tidigare, men det behöver nog tas ordentligt i alla fall. Man finna flera övningar på de här sakerna i »startboken«. Vad gäller logaritmer, som brukar vara det som upplevs som svårast, ska ni komma ihåg att (nästan) allting finns gömt i den här formeln:

$$\log_a x = u \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = a^u,$$

som också kan skrivas

$$x = a^{\log_a x}.$$

Med hjälp av denna kan man till exempel bevisa logaritmlagen (vi) så här:

$$\begin{aligned} \text{Å ena sidan är } x &= a^{\log_a x} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = b^{\log_b a \log_a x}, \\ \text{och å andra sidan är } x &= b^{\log_b x} \end{aligned}$$

Jämför exponenterna i de båda högerleden, så följer

$$\log_b a \log_a x = \log_b x,$$

vilket är lagen (iv).

Ni bör arbeta er igenom alla **övningarna 1–18 och 29–30 på sid. 171** Det är ofta lämpligt att kalla det sökta talet för något, t.ex. x. Som ett exempel visar vi här ett sätt att lösa nummer 6. Sätt $x = \log_4\left(\frac{1}{8}\right)$. Då är $4^x = \frac{1}{8}$. Både 4 och 8 är ju potenser av 2, så det borde vara klokt att skriva om dem så:

$$4^x = \tfrac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad \left(2^2\right)^x = 1/2^3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2x} = 2^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{3}{2}.$$

3.3: Här definieras den naturliga logaritmen och exponentialfunktionen på allvar. Läs igenom sid. 171–176, med ambitionen att förstå de stora dragen i hur man steg för steg *konstruerar* allt det som i de tidigare studierna varit ganska odefinierat. Naturligtvis ska ni inte lägga alla smådetaljer på minnet. I **Ex. 8–10** introduceras en användbar metod: logaritmisk derivering, som kan underlätta hanteringen av uttryck med komplicerade faktorer och komplicerade potensuttryck. Även på detta avsnitt bör ni göra många övningar: ln och e^x hör till matematikens viktigaste funktioner. **Sid. 179: nummer 1–16, 19–28, 31, 35, 41, 49, 57, 59.** (Nummer 6 löser man t.exså här:

$$e^{2\ln\cos x} + \left(\ln e^{\sin x}\right)^2 = e^{\ln\cos^2 x} + (\sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.)$$

Till räkneövning nr 6

3.4: Här finns sats 5, fyra viktiga »standardgränsvärden«. I sammanhanget kan det vara idé att göra en mer allmän jämförelse av hur fort olika funktioner växer då $x \to \infty$. Vi definierar symbolen $\prec$ genom att säga

$$f(x) \prec g(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Det kan utläsas »$f(x)$ är svagare än $g(x)$«. I så fall kan man ställa upp t.ex. följande kedja:

$$\cdots \prec \ln\ln x \prec \ln x \prec x^{\delta} \prec x \prec x^{1000} \prec \cdots \prec e^{\delta x} \prec e^x \prec x^x \prec e^{x^2} \prec \cdots$$

Här står δ som representant för ett godtyckligt tal mellan 0 och 1. Denna lista kan fortsättas godtyckligt långt åt både höger och vänster, och mellan två funktioner i listan kan man alltid interpolera ett godtyckligt antal nya funktioner.

Med hjälp av denna lista kan man beräkna gränsvärden, bl.a. som i följande exempel:

Exempel. Bestäm $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x} + x^2 - 1}{2e^{2x} + x^{35}}$.

Lösning: När x är stort dominerar exponentialtermerna i både täljare och nämnare. Då bryter vi ut e^{2x} och förkortar (jämför räkneövning 3, sid. 5 i detta häfte):

$$\frac{e^{2x} + x^2 - 1}{2e^{2x} + x^{35}} = \frac{e^{2x}\left(1 + \dfrac{x^2}{e^{2x}} - \dfrac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(2 + \dfrac{x^{35}}{e^{2x}}\right)} = \frac{1 + \dfrac{x^2}{e^{2x}} - \dfrac{1}{e^{2x}}}{2 + \dfrac{x^{35}}{e^{2x}}} \longrightarrow \frac{1+0-0}{2+0} = \tfrac{1}{2}.$$

□

Det som står om exponentiell tillväxt och avtagande bör dels vara inte helt obekant från tidigare, och dessutom kommer vi att ta detta senare i samband med en systematisk behandling av differentialekvationer. Men den som är intresserad av tillämpningar kan redan nu ta en titt på exemplen: biologi i **Ex. 1**, fysik i **Ex. 2–3** och ekonomi i avsnittet om Interest (= ränta).

I sats 6 sid. 184 kommer ännu ett viktigt standardgränsvärde, som faktiskt är ett alternativt sätt att definiera exponentialfunktionen. Det ska ni lära er. Logistisk tillväxt är intressant för biologer.

Övningar på sid. 187: 1–8 (samt, om ni har tid, de av 9–20 som ni tycker verkar intressanta).

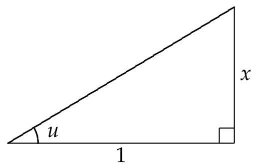
3.5: Här har vi en hop alldeles nya funktioner, som det gäller att bli god vän med. Vi undviker skrivsättet $\sin^{-1}$ och skriver arcsin (osv.) i stället. Det räcker att man behärskar arcsin, arccos och arctan (möjligen även arccot); arcsec och arccsc kan ni hoppa över alldeles. Jag föreslår följande formuleringar av definitionerna:

$$\begin{aligned}
y &= \arcsin x & \Longleftrightarrow \quad & \sin y = x \text{ och } -\tfrac{1}{2}\pi \le y \le \tfrac{1}{2}\pi, \\
y &= \arccos x & \Longleftrightarrow \quad & \cos y = x \text{ och } 0 \le y \le \pi, \\
y &= \arctan x & \Longleftrightarrow \quad & \tan y = x \text{ och } -\tfrac{1}{2}\pi < y < \tfrac{1}{2}\pi.
\end{aligned}$$

Funktionen arccos använder man i geometrin när man beräknar vinkeln mellan två vektorer. Alla funktionerna dyker upp när vi kommer till integraler, därför att de har så enkla derivator. I praktiskt arbete med dem har man stor nytta av att rita rätvinkliga trianglar, exempelvis när man ska förvandla en av dem till någon annan. Vi kompletterar bokens exempel med ett par till:

Exempel. Bevisa att $\arctan x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ för alla x.

Lösning: Antag först att $x > 0$. Rita en figur som innehåller vinkeln $u = \arctan x$. Det blir en rätvinklig triangel med kateterna x och 1, som i figuren till höger. Pythagoras' sats ger hypotenusan lika med $\sqrt{x^2+1}$. Man ser att $\sin u = x/\sqrt{x^2+1}$, och eftersom uppenbarligen $0 < u < \pi/2$ måste då $u = \arcsin\big(x/\sqrt{x^2+1}\big)$. Därmed är vi klara med fallet $x > 0$. Om $x = 0$ är båda sidor av påståendet lika med 0, så saken är klar då också. Om $x > 0$, sätt $y = -x$ och använd att både arcsin och arctan är udda funktioner. (Genomför detta!)



□

Exempel. Beräkna $\arctan 2 + \arctan 3$.

Lösning: Sätt $u = \arctan 2$, $v = \arctan 3$ och $w = u + v$. Då gäller (varför?)

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\pi < u < \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{4}\pi < v < \frac{1}{2}\pi \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \begin{cases} \tan u = 2 \\ \tan v = 3 \end{cases}$$

Det följer att $\frac{1}{2}\pi < w < \pi$. Vidare ger additionsformeln för tangens (Adams sid. 50, längst ner):

$$\tan w = \tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = \frac{5}{-5} = -1.$$

Det sökta talet är alltså det tal w i intervallet $]\frac{1}{2}\pi, \pi[$ för vilket $\tan w = -1$. Den sista ekvationen har lösningarna $w = -\frac{1}{4}\pi + n\cdot\pi$, där n är ett godtyckligt heltal. Den enda lösningen i det rätta intervallet får man för $n = 1$. Detta ger:

Svar: $\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3}{4}\pi$. □

Övningar på sid. 187-188: 1–12, 22, 25, 31. (Rita figur lönar sig nästan alltid!) Fundera dessutom på följande problem (lösningar i slutet av häftet):

•(a) Bestäm $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$ för alla $x \neq 0$.

•(b) Beräkna $\arcsin \frac{99}{101} + 2\arctan \frac{1}{10}$.

•(c) Hur många lösningar har ekvationen $\arctan x = \pi/4$?

3.6: De hyperboliska funktionerna är »varianter« av exponentialfunktionen, som är eleganta att använda i vissa situationer. Ni ska kunna deras definition, men behöver inte fördjupa er i saken. De inversa hyperboliska funktionerna kan ni helt hoppa över. För skojs skull kan ni göra **övning 2 sid. 200**. Det *finns* ett samband mellan dessa funktioner och de trigonometriska; men för att klargöra det behöver man komplexa tal.

3.7 hoppar ni över nu. Det återkommer vi till i slutet av kursen.

När ni kommit så här långt, har ni stött på praktiskt taget alla deriveringsregler som ingår i kursen. I slutet av detta häfte, på sidan 28, finns ett antal blandade övningar på derivering, »Stora deriveringsköret«. Det är nyttigt att då och då bläddra fram den sidan och ta några av problemen där, för att hålla deriveringsfärdigheten i gång.

Till räkneövning nr 7

Kapitel 4 tar upp en del tillämpningar av derivator. Avsnitt 4.1 innehåller några bra exempel. När man ska lösa problem som handlar om hastigheter av olika slag räcker det inte att bara studera en »ögonblicksbild« av situationen. Man måste »låta tiden gå« för att kunna dra några slutsatser. Studera **Ex. 1–2** och **4**. **Övningar på sid. 214: 1, 3, 11.**

Extremvärdesproblem, avsnitt 4.2 och 4.3, är de viktigaste avsnitten i kapitlet. Läs 4.2 t.o.m. **Ex. 4** sid 244; återstoden av avsnittet är inte fullt så viktig. Observera »tabellen« i **Ex. 3** och **4**, där man redovisar derivatans tecken och drar slutsatser om hur f växer och avtar. (Den översta raden med EP, CP osv. är ganska onödig. Man kan använda tecknet $\wr$ för att markera om f' inte existerar, dvs punkten är singulär.)

Övningar på sid. 222: 1–3, 7, 13, 15, 19, 22, 29. Observera att om funktionen är enkel, kan man ofta klara sig utan derivering. Försök t.ex. lösa nummer 15 på detta sätt!

Avsnitt 4.3: Konkavitet och inflexionspunkter hör till allmänbildningen, men är inte lika viktigt som max och min. Ofta blir andraderivatan så komplicerad, att undersökning av konkavitet kan vara svår att genomföra. Men studera gärna **Ex. 1–2**. **Övningar på sid. 227: 9, 15.**

I avsnitt 4.4 handlar det om hur man ritar lite krångligare kurvor.

För att finna *sneda* (inklusive vågräta) asymptoter kan man ibland klara av att skriva kurvans ekvation på formen

$$y = ax + b + E(x), \quad \text{där } E(x) \to 0 \text{ då } x \to \infty \text{ (eller } -\infty).$$

Detta ser man i **Ex. 3–5**. En mer allmän metod består i att man först beräknar $a = \lim y/x$. Om detta existerar (ändligt), *kan* det finnas en asymptot med lutningen a. För att se om det verkligen är så beräknar man också $b = \lim(y - ax)$. Om detta existerar (ändligt), har man verkligen asymptoten $y = ax + b$. Se följande exempel!

Exempel. Bestäm ev. sneda asymptoter till kurvan $y = \sqrt{4x^2 + x}$.

Lösning. Först tar vi $x > 0$. Då har vi först

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{4x^2 + x}}{x} = \sqrt{4 + \frac{1}{x}} \to 2 \quad \text{då } x \to +\infty.$$

Detta visar att om det finns en sned asymptot åt höger, så måste den ha lutningen 2. För att avgöra om asymptoten verkligen existerar, undersöker vi

$$\begin{aligned} y - 2x &= \sqrt{4x^2 + x} - 2x = \frac{(4x^2 + x) - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x} = \frac{x}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x} \\ &= \frac{x}{x\left(\sqrt{4 + (1/x)} + 2\right)} = \frac{1}{\sqrt{4 + (1/x)} + 2} \to \frac{1}{2 + 2} = \tfrac{1}{4} \quad \text{då } x \to +\infty. \end{aligned}$$

Detta visar att linjen $y = 2x + \frac{1}{4}$ är asymptot åt höger. På liknande sätt kan man visa att linjen $y = -2x - \frac{1}{4}$ är asymptot åt vänster. Genomför detta! (Det kan vara lämpligt att sätta $x = -t$ och låta $t \to +\infty$ i stället för $x \to -\infty$ vid gränsvärdesberäkningarna!)

Andraderivatan är ofta onödig att beräkna. Man kommer långt med förstaderivatan och teckenstudium av den.

Gör **övningar på sid. 236: 7, 11, 13, 19, 30, 31, 37**. Obs. fel markeringar på x-axeln i facit till nummer 37.

Till räkneövning nr 8

Problem. Genom punkten $(2,3)$ dras en rät linje ℓ, som tillsammans med de positiva koordinataxlarna avgränsar en triangel. Vilken lutning ska ℓ ha för att triangelns area ska bli så liten som möjligt?

Exemplen på »tillämpade problem« i 4.5 är bra. Det tonade avnittet på sid 238–9 kan ses som ett viktigt specialfall av de allmänna principerna för problemlösning som finns på sidan 2 i detta häfte.

Övningar på sid. 242–243: 1, 6, 7, 11, 15, 27.

Avsnitt 4.6 hoppar vi över (det kommer i en kurs i *numerisk analys* senare i utbildningen).

I avsnitt 4.7 kommer Adams (äntligen) in på den *approximationsegenskap*, som vi redan har nämnt tidigare. Det som kallas *lineariseringen av* f *omkring en punkt* $x = a$ är den approximation av f som geometriskt betyder att grafen av f ersätts med sin tangent i punkten. Om man inte är särskilt långt borta från a, kan denna enkla approximation vara fullt användbar. Lär texten t.o.m. **Ex. 3**. Resten av avsnittet kan hoppas över just nu. Räkna några **problem på sid. 256: nummer 3, 7, 11.**

Avsnitt 4.8 handlar om en sorts fortsättning av idén i 4.7. Att approximera med en rät linje, som i 4.7, är ju detsamma som att approximera med ett polynom av första graden. Nu vill man fixa förbättrade approximationer i närheten av en punkt $x = a$ genom att använda polynom $P_n(x)$ av grad n. Det visar sig att om man ser till att $P_n(x)$ har samma värde som $f(x)$ i punkten a och att detsamma gäller för derivatorna av ordning upp till och med n, så får man ett entydigt bestämt polynom som approximerar f på ett mycket bra sätt just i närheten av $x = a$. Läs texten fram t.o.m. formuleringen av sats 10. Beviset kan ni hoppa över – vi kommer att ge ett annat bevis för saken senare i kursen. I **Ex. 3–4** ser man hur Taylors formel kan användas för numerisk approximation. För våra tillämpningar kommer det nästan alltid att räcka med den verision av resttermen som kommer efter Definition 9. Sats 11 är också praktisk: den säger att om man har hittat ett polynom som approximerar lika bra som ett Taylorpolynom, så måste det faktiskt vara Taylorpolynomet. Detta används i **Ex. 5–6**.

Observera hur O-symbolen fungerar. Här är några exempel på hur man kan räkna med den:

$$\begin{aligned} O(x^3) + O(x^3) &= O(x^3), \quad O(x^3) + O(x^4) = O(x^3), \\ O(x^5) - O(x^5) &= O(x^5), \quad x^3 O(x^4) = O(x^7). \end{aligned}$$

Några taylorpolynom som ideligen används kan redan nu vara bra att lära sig. De finns i Table 4 på sid. 262. För referensens skull kopierar vi listan här (med lätta justeringar):

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O\big(x^{n+1}\big) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O\big(x^{2n+1}\big) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} + O\big(x^{2n+2}\big) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} + O\big(x^{n+1}\big) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + O\big(x^{2n+1}\big) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}\,x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\,x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + O\big(x^{n+1}\big)
\end{aligned}$$

I avsnitt 4.9 beräknas vissa typer av gränsvärden. Kom också ihåg följande standardgränsvärden, som kan göra det hela lite snabbare i vissa fall:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Om man ska undersöka ett gränsvärde då $x\to a$, kan det ofta vara idé att byta variabel och sätta $t=x-a$ (dvs. $x=a+t$). Att $x\to a$ är då detsamma som att $t\to 0$, och den situationen är ofta enklare att hantera.

Exempel 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}=?$

$$\frac{\tan 3x}{x}=\frac{\sin 3x}{x\cos 3x}=\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{\cos 3x}\to 1\cdot\frac{3}{1}=3.$$

Exempel 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-\cos x}{x^2}=?$

Här tar vi till Taylor. $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)$, $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4)$ ger

$$\begin{aligned}\frac{e^x-x-\cos x}{x^2}&=\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)-x-1+\frac{1}{2}x^2-O(x^4)}{x^2}\\&=\frac{x^2+O(x^3)-O(x^4)}{x^2}=1+O(x)\to 1.\end{aligned}$$

Studera också bokens **Ex. 1–2** och de exempel som ges på föreläsningen!

Adams tar upp ett par satser, Th. 12 och 13, som kallas l'Hôpitals regler. *Dessa är onödiga att lära sig. Nästan allt som kan göras med dem, kan också göras med Taylors formel, och risken för fel är betydligt mindre med Taylors formel.* Här ger vi några exempel på detta, som kan ersätta bokens lösningar av vissa av **Ex. 5–8**. (**Ex. 9** kan ni hoppa över.)

Example 5. (a) Beräkna $\lim\limits_{x\to(\pi/2)-}\dfrac{2x-\pi}{\cos^2 x}$.

Lösning: Sätt $x-\pi/2=t$, så ska $t\to 0-$. Nämnaren blir $\cos^2(t+\pi/2)=$
$=\cos^2(\pi/2-(-t))=\sin^2(-t)=\sin^2 t$, och vi får

$$\frac{2x-\pi}{\cos^2 x}=\frac{2t}{\sin^2 t}=\frac{t}{\sin t}\cdot\frac{2}{\sin t}.$$

Den första faktorn går mot 1 och den andra mot $-\infty$, vilket ger samma resultat som i Adams. Men denna lösning innehåller inget »hokus-pokus«, som l'Hôpital snarast är. □

Example 6. Beräkna $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

Lösning. Vi skriver om uttrycket genom att sätta på ett bråkstreck och taylorutveckla:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}&=\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\frac{x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5)-x}{x(x+O(x^3))}=\frac{x^3(-\frac{1}{6}+O(x^2))}{x^2(1+O(x^2))}\\&=x\cdot\frac{-\frac{1}{6}+O(x^2)}{1+O(x^2)}\to 0\cdot\frac{-\frac{1}{6}}{1}=0\end{aligned}$$

då $x\to 0+$ (eller, för den delen, då $x\to 0$ överhuvudtaget). □

Example 7 ska överhuvud taget inte göras med l'Hôpital, eftersom de är kända standardgränsvärden. **Example 8** kan göras som i Adams eller direkt så här:

$$x^x = e^{x \ln x} \to e^0 = 1 \text{ då } x \to 0+.$$

Här används att exponentialfunktionen är kontinuerlig. $\square$

Övningar sid. 269–270: 1, 3, 4, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19.

Blandade problem 2

Sammanfattning och repetition av kapitel 3 och 4. Försök lösa dessa problem före den föreläsning då de kommer att gås igenom!

7. Beräkna följande gränsvärden:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right), \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x) - 2x\cos x}{x^2\ln(1-3x)}.$$

8. Rita kurvan

$$y = \frac{x^2+2x}{|x|+1}$$

   med angivande av ev. asymptoter och lokala extrempunkter.

9. Bevisa att olikheten $\tan x + 2\ln\cos x > 0$ gäller för $0 < x < \pi/2$.

10. Låt $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ för $0 < x \leq 1$. Visa att f har invers, och bestäm f^{-1}.

11. En rektangulär badbassäng är 20 m lång och 8 m bred. Dess botten är ett lutande plan, så att bassängen är 1 m djup längs ena kortändan, 3 m djup längs den andra. Man tömmer vatten ur bassängen med en hastighet av 1 m^3 per minut. Hur snabbt sjunker vattenytan i det ögonblick då den djupa ändan har ett vattendjup av (a) 2,5 m, (b) 1 m?

12. Bestäm definitionsmängd och värdemängd för funktionen

$$f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}.$$

13. Bestäm derivatorna av följande funktioner:

   (a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, (b) $g(x) = \arctan f(x)$, där $f(x)$ är samma funktion som i (a).

   (c) Med ledning av resultatet i (b), kan man finna något enklare sätt att skriva funktionen g?

Till räkneövning nr 9

Problem. En vattentank har formen av en rät cirkulär kon med spetsen nedåt, med basradie 10 m och djup 8 m. Tanken fylls på med en hastighet av $1/10$ m^3 per minut. Med vilken hastighet stiger vattenytan i tanken i det ögonblick då vattnet står 4 m djupt?

Nu ska ni ta itu med motsatsen till derivering: integration. Under denna rubrik sammanfattar man två olika, men besläktade, problem. Det första introduceras i avsnitt 2.10 i Adams, som börjar på sid. 145. Definition 7 är viktig, och därför formulerar vi den här på svenska:

Låt f vara en funktion definierad på ett intervall I. En annan funktion F kallas *antiderivata* eller *primitiv funktion till f på I*, om $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in I$.

Observera att begreppet antiderivata är knutet inte bara till funktionen f utan också till intervallet I. En förklaring till att detta är lämpligt finns i sats 13 sid. 128, som inte är sann om man har en annan definitionsmängd. Se kommentaren efter **Ex. 1** sid. 146.

Ex. 1–4 bör ni studera. Av de tonade formlerna på sid. 147 kan ni låta bli (k) och (l), kanske också (j). De andra är sådana som ni ska känna till.

Slutet av avsnittet, om differentialekvationer och begynnelsevärdesproblem, spar vi till senare. **Öva på sid. 151, nummer 1–14.** Kom ihåg att kontrollera era svar genom att »derivera tillbaka«!

Sedan hoppar ni till kapitel 5. Avsnitt 5.1 om summabeteckningen bör ni ha sett i algebran. Om ni känner er osäkra på saken, kan det vara lämpligt att göra några av övningarna på sid. 278.

I 5.2 diskuteras begreppet area. På sid. 309 räknas upp fem egenskaper som ett vettigt areabegrepp bör ha, och sedan diskuteras hur man ska förverkliga detta så att man kan tala om arean av först polygonområden och sedan områden med krökta kurvor som rand. (Jämför Archimedes' mätning av cirkeln sid. 60–61!) Exemplen på sid 281–284 är inte särskilt nödvändiga att ta sig igenom. Det räcker att konstatera att man *kan* beräkna vissa areor genom approximation med rektanglar och fiffigt räknande – i senare avsnitt får vi mer kraftfulla metoder för detta.

Definitionen av integral i avsnitt 5.3 är principiellt viktig, men man ska inte hamra in detaljerna i huvudet. De stora dragen är dessa:

---

1. Dela in intervallet $[a, b]$ i småintervall.

2. Approximera f uppifrån och nedifrån med funktioner som är konstanta på varje småintervall. Dvs. approximera området mellan grafen av f och x-axeln uppifrån och nedifrån med rektanglar.

3. Om det går att göra differensen mellan dessa approximationer godtyckligt liten genom att man gör indelningen av intervallet tillräckligt fin, finns det exakt ett tal I som är $\leq$ alla »översummor« och $\geq$ alla »undersummor«. Då säger vi att f är integrerbar över $[a, b]$ och talet I kallas integralen av f över $[a, b]$:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Om f är integrerbar, kan man beräkna I genom att genomföra approximationer för en följd av indelningar som blir allt finare; detta demonstreras i **Ex. 2–3**. Man kan också approximera med allmänna Riemannsummor, som talas om på sid. 289. Men för det mesta beräknar man integraler med helt annan teknik, som kommer i de följande avsnitten.

Att en kontinuerlig funktion är integrerbar (Theorem 2) får vi acceptera utan bevis. Däremot är det lätt att bevisa att t.ex. en *växande* funktion är integrerbar – se övning 17 sid. 291.

I avsnitt 5.4 har vi ett antal räkneregler för integraler. Notera de genvägar som kan finnas, t.exòm man kan tolka integralen som en area som man lätt beräknar med elementära metoder. **Ex. 1** visar några sådana fall. Notera särskilt att om f är en *udda* funktion och intervallet är symmetriskt kring 0, så blir integralen noll.

Medelvärdessatsen är viktig, liksom definitionen av medelvärdet av en funktion över ett intervall. Definition 5 är ganska självklar och inte mycket att göra väsen av.

Övningar på sid. 296: 1, 3, 5, 7, 10, 11, 13. Alla dessa (utom den första) ska kunna lösas med användning av symmetrier och kända areor!

Någon har sagt att »*derivering är ett räknesätt, men integration är en konst*«. Dvsätt derivera är något som man så småningom gör rutinmässigt, men att integrera kräver mycket mer. Det finns till synes enkla integraler, som helt enkelt är omöjliga att beräkna med s.kėlementära metoder (och några andra blir det inte fråga om i den här kursen). Exempel på detta är

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \quad \int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Och för att beräkna till synes väldigt lika integraler kan det krävas vitt skilda metoder. Jämför t.ex. hur man beräknar

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx \quad \text{och} \quad \int \sin^2 x \cos^3 x\,dx.$$

(behandlas på sid. 339–340).

I avsnitt 5.5 finns »Analysens huvudsats«, som knyter ihop antiderivator och integraler. Notera att satsen består av två delar: den första handlar om derivatan av en integral, den andra om integralen av en derivata. Studera alla exemplen i avsnittet och **räkna övningarna 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17, 25, 33, 39, 41 på sid. 301–302.**

Till räkneövning nr 10

Nu bör ni vara mogna för det här problemet (som finns i Adams som problem 26 på sidan 243):

Problem. En korridor med bredden a m möter vinkelrätt en annan korridor med bredd b m. Hur stor är den maximala längden av en smal (men mycket tung) stav, som kan föras längs golvet från den ena korridoren in i den andra?

Vi ska nu gå in på mer avancerade metoder för integration. Substitution eller *variabelbyte* behandlas i 5.6. För att man ska bli en bra integrerare gäller det att lära sig att se vilket variabelbyte som kan fungera för en given integral. Det bästa sättet att lära sig detta är genom erfarenhet, dvs. att räkna många exempel. Listan på sid. 302–303 är kanske lite onödigt omfattande. Nummer 1–6 är ju bara specialfall av nummer 7. Av de följande behöver ni inte lära utantill nummer 13, 14 och 18–20. Däremot borde listan utökas med den mycket användbara formeln

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C. \tag{1}$$

Läs, med papper och penna redo för ev. kontrollräkningar, **Ex. 1–4**. När man räknar bestämda integraler, skall gränserna justeras på det naturliga sättet: se **Ex. 5–6**. Trigonometriska uttryck kommer sedan. Integralerna av tan och cot kan ses som fall av (2), de båda övriga i rutan på sid. 303 kan ni hoppa över. Läs **Ex. 7–9**, men skippa **Ex. 10**.

När ni räknar obestämda integraler på sid. 309, kom ihåg det som står i inledningen till dessa övningar: Ett svar kan se ut på annat sätt än i facit, men ändå vara rätt. (Och ett ganska säkert sätt att kontrollera sig själv är att kontrollderivera det svar man har fått, förutsatt att man deriverar rätt!). **Gör ett rejält urval av övningarna, t.ex. 1, 3, 5, 7, 9, 12, 14–16, 23, 26; 39, 42.**

I avsnitt 5.7 tillämpas integraler på areaberäkningar. Studera exemplen. Notera att man oftast måste göra en del förarbete innan man sätter upp en integral, för att veta vilka gränser som gäller osv. **Gör övningarna 3, 9, 13, 17, 25 på sid. 313–314.**

Kapitel 6 tar upp flera integrationstekniker. Avsnitt 6.1–3 måste ni arbeta mycket med.

»Integration by parts« kallas på svenska *partiell integration*. Denna idé kan vara användbar om integranden består av två faktorer (eller ibland bara en faktor), där den ena blir »enklare« av att deriveras (eller evintegreras) och den andra i varje fall inte blir väsentligt »svårare« av att integreras (respderiveras). **Ex. 1** och **2** innehåller ett antal bra exempel. Hoppa över **Ex. 3**. I **Ex. 4** har ni ett mer intrikat fall. I **Ex. 5** visas hur man kan sätta in integrationsgränser allteftersom man räknar på. Avsnittet om reduktionsformler kan ni läsa igenom, men ägna inte alltför mycken tid åt det.

Övningar på sid. 321–322: 1, 3, 5, 13, 19, 21.

I 6.2 kommer fler variabelbyten. Substitution med arcsin, **Ex. 1–2**, bör man känna till. **Ex. 3** och **4** är mindre viktiga. Att komplettera kvadrater, som i **Ex. 5**, har man ofta nytta av.

Om en integral innehåller uttryck av formen $\sqrt{ax+b}$ lönar det sig att försöka med att sätta $u = \sqrt{ax+b}$: **Ex. 6**. Liknande idéer används i **Ex. 7–8**. Variabelbytet $x = \tan(\theta/2)$, som avslutar avsnittet, är däremot mindre användbart i praktiken, eftersom det oftast leder till mycket komplicerade integraler.

Till bokens förslag på variabelbyten kan man lägga ett par till: Om en integrand kan skrivas $F(e^{ax})$, kan det vara en god idé att försöka med $u = e^{ax}$. Och om $\ln x$ ingår i integranden kan det löna sig att sätta $u = \ln x$. Vi demonstrerar detta:

Exempel 1. Bestäm $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx$.

Lösning: Sätt $u = e^x$. Då är $du = e^x\,dx = u\,dx$, dvs. $dx = du/u$. Man får

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx = \int \frac{u-1}{u+1}\,\frac{du}{u} = \int \frac{u-1}{u(u+1)}\,du,$$

som kan beräknas genom partialbråksuppdelning osv. (se avsnitt 6.3). Genomför beräkningen! Kontrollera svaret genom att derivera! □

Exempel 2. Bestäm $\displaystyle\int \frac{\cos \ln x}{x}\,dx$.

Lösning: Sätt $u = \ln x$, så blir $du = dx/x$ osv. Gör färdigt, kontrollera! □

Öva på sid. 328: 1, 3, 17, 29, 33, 35.

Till räkneövning nr 11

I avsnitt 6.3 ges en systematisk metod för att integrera rationella funktioner. Det viktigaste, och svåraste, momentet är *partialbråksuppdelning*, som sammanfattas i Theorem 1 s. 336. För säkerhets skull redovisar vi här hela metoden på svenska:

För att kunna integrera $f(x) = P(x)/Q(x)$, gör följande:

$\boxed{1}$ Utför ev. divisionen; sedan återstår att behandla fallet då gradtalet av P är mindre än gradtalet av Q.

$\boxed{2}$ Faktorisera $Q(x)$ i (reellt) irreducibla faktorer. (Detta kan i praktiken vara ett mycket svårt moment.)

$\boxed{3}$ Ansätt partialbråk efter följande regler:

$\boxed{a}$ En enkel faktor $x - a$ ger en term av formen $A/(x - a)$.

$\boxed{b}$ En multipel faktor $(x - a)^n$ ger termer av formen

$$\frac{A_n}{(x-a)^n} + \cdots + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_1}{x-a}.$$

$\boxed{c}$ En enkel faktor $x^2 + ax + b$ ger en term av formen $\dfrac{Ax + B}{x^2 + ax + b}$.

$\boxed{d}$ En multipel faktor $(x^2 + ax + b)^n$ ger termer av formen

$$\frac{A_n x + B_n}{(x^2+ax+b)^n} + \cdots + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2+ax+b)^2} + \frac{A_1 x + B_1}{x^2+ax+b}.$$

$\boxed{4}$ Multiplicera med nämnaren, förenkla, identifiera koefficienter osv.

Sedan kan termer av typerna a–c integreras, medan fall d hänvisas till formelsamlingar och sådant.

Läs bokens **Ex. 1** och **2**. Av de tonade formlerna på sid. 330–331 är det angeläget att kunna dem som har $x^2 + 1$ i nämnarna; de övriga kan klaras med lämpliga omskrivningar och partialbråksuppdelning. **Ex. 3–8** visar upp olika saker som kan inträffa. Det viktigaste bör finnas med i de exempel som ges på föreläsningen. **Räkna övningarna 1, 5, 9, 11, 13, 21, 25 på sid. 336.**

När ni har kommit så här långt, har ni stött på alla de vanliga metoderna för »elementär« integration. Det är då lämpligt att bläddra fram till **sidan 365**, där man finner en samling blandade integraler. Här får man inte ledning till vilken metod som ska användas genom att problemet står efter ett visst avsnitt; utan nu gäller det att själv välja integrationsmetod! **Gör så många av dem som ni orkar!** Några kan vara ganska svåra. Fastna då inte på dem för länge utan gå vidare. Här bör diskussion med kamraterna i gruppen vara en mycket fruktbar arbetsform. Observera också sammanfattningen av integrationsmetoder på sidan 365. På sidan 29 i detta häfte finns dessutom »Lilla integralköret«, några delvis ganska knepiga integraler att fundera på då och då under resten av kursen.

Avsnitt 6.4 handlar om hur man använder hjälpmedel (datorprogram och formelsamlingar) för att beräkna integraler. Om ni kommer åt att använda MAPLE, kan ni gärna pröva och se hur det programmet klarar att beräkna olika integraler.

6.5. Generaliserade integraler säger vi på svenska. Definitionerna 1 och 2 är ganska naturliga. **Ex. 1–6** är typiska. Av Theorem 2 skall man känna till för vilka värden på p som integralerna är konvergenta, däremot är det onödigt att lära sig integralernas värden. Sats 3, jämförelsesatsen eller *jämförelsekriteriet*, används för att undersöka konvergens av integraler utan att man behöver kunna beräkna deras eventuella värden. Se **Ex. 8–9**. **Räkna övningarna 1, 3, 5, 15, 17, 31, 34 på sidan 347.**

Återstoden av kapitel 6 ingår inte i kursen. Kapitel 7 handlar om olika användningar av integraler. Det är en vanlig missuppfattning att en integral alltid måste betyda en area. Så är det inte alls. Den kan också betyda en volym, en massa, ett arbete, ett tröghetsmoment och en massa annat.

7.1. Rotationsvolym bör vara bekant från gymnasiet, och ni bör kunna läsa avsnittet utan att stanna upp särskilt mycket. Den allmänna idén för volymsberäkning presenteras med början på sid. 369, och det speciella fallet med rotationskroppar följer efter. Metoden med cylindriska skal bygger på en annan idé. *Det rätta sättet att komma ihåg den här sortens formler är att förstå idén eller metoden, och vid behov rekontruera formeln.* (Trigonometriska formler ska man kunna utantill, men inte såna här!) Läs exemplen och räkna t.ex. **övningarna 5, 7, 19, 21 på sidan 376**.

7.2. Här finns fler exempel på skivningsmetoden. **Ex. 1** och **2** är bra. **Ex. 3** är knepigare — läs det gärna, men fastna inte i det om det känns svårt. (Ni kommer att få mer praktiska metoder att hantera komplicerade kroppar i Flerdim-kursen.) **Övningar på sid. 380: nummer 11 och 15**. Den som har talang för att teckna figurer kan kanske finna inspiration att försöka rita figurer till fler av övningarna — en del kroppar som beskrivs där verkar vara ganska intrikat utformade!

7.3. Båglängd av en kurva beskriven på formen $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Härledningen behöver inte kommas ihåg i den »strikta« versionen som inleder avsnittet, utan kom ihåg »Leibniz-resonemanget« på sidan 383. Ex. 1–4 visar att båglängden i praktiken ofta är svår att beräkna. Vi hoppar över rotationsarea på sidan 385 f. (även om det egentligen inte är särskilt svårt). **Övningar 1, 3, 7, 12 på sid. 387.**

Återstoden av kap, 7 ingår inte i kursen, Men den som är intresserad av fysik kan titta igenom 7.4–6, i 7.7 finns ett par tillämpningar på ekonomi och ekologi, och i 7.8 finns grunderna till sannolikhetskalkylen. Det som står i 7.9 kommer vi att ta upp senare.

Blandade problem 3

Sammanfattning av integrationskapitlen! Några problem som kommer att räknas på en föreläsning. Förbered dig genom att försöka lösa dem själv först!

14. Beräkna integralen
$$\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 6}\, dx.$$

15. Beräkna integralerna
$$\text{a)} \quad \int_{-2}^{2} |x^3 - x|\, dx, \qquad \text{b)} \quad \int_{-1}^{1} \frac{2x \cos \pi x}{(1 + x^4)^2}\, dx.$$

16. Bestäm volymen av den kropp, en s.k. torus, som uppstår då området $x^2 - 4x + y^2 + 3 \leq 0$ roterar kring y-axeln.

17. Beräkna integralerna

$$\text{(a)} \quad \int_{-1}^{1} \arcsin \sqrt{|x|}\, dx, \qquad \text{(b)} \quad \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{(1+\sin x)^2}\, dx.$$

18. Undersök om följande generaliserade integraler är konvergenta, och bestäm värdet om de är det:

$$\text{a)} \quad \int_{2}^{\infty} \frac{6x+4}{x^3+x^2-2}\, dx, \qquad \text{b)} \quad \int_{0}^{\infty} \frac{(2+\cos x)\sqrt{x^4+1}}{(x^2+1)\sqrt{x+1}}\, dx.$$

19. Beräkna längden av kurvbågen $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ från $x = 0$ till $x = a$.

Till räkneövning nr 12

Till denna lektion ska ni arbeta med kapitel 9. Rubriken är »Följder och serier«.

9.1. En *talföljd* är, informellt, en följd av tal, som man räknar upp och skriver kommatecken emellan:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots.$$

Mer formellt kan en talföljd uppfattas som en funktion definierad på de positiva heltalen: $n \mapsto a_n$. I definition 1 på sidan 472 finns en massa terminologi, som beskriver olika egenskaper som en talföljd kan ha. Observera också det uttryckssätt som införs på nästa sida: *ultimately decreasing* (etc), på svenska *så småningom avtagande* (osv.). Konvergensdefinitionen är en version av samma gränsvärdesdefinition som ni sett redan i kapitel 1. Räknereglerna på färgad bakgrund sidan 475 är också versioner av motsvarande räkneregler för funktioner av en kontinuerlig variabel.

Läs **Ex. 1–6**. **Ex. 7** bör göras på annat sätt:

Example 7. Beräkna $\lim_{n\to\infty} n \arctan \dfrac{1}{n}$.

Lösning. När n är stort, är $1/n$ nära 0. Vi kan då använda Taylorapproximationen $\arctan x = x + O(x^3)$ och får

$$n \arctan \frac{1}{n} = n\left(\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right) = 1 + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \to 1 \quad \text{då } n \to \infty.$$

□

Sats 1 är kanske inte så märkvärdig, men resultatet nedanför på sidan 476 är *mycket* betydelsefullt (märkligt nog har det inte fått rubriken Theorem, vilket det borde ha). Allt som står på sid. 477–478 är läsvärt. **Övningar på sidan 478: nummer 1, 5, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 25, 27, 31.** Det viktigaste i övningarna 1–11 är deluppgift (d), dvsatt avgöra om följderna är konvergenta eller ej (och, om de är konvergenta, att bestämma gränsvärdena). Rätt många av dessa övningar kan uppfattas som repetition av saker som gjordes redan i kapitel 1.

Nu har ni gått igenom alla metoder för beräkning av gränsvärden, som ingår i kursen. Det kan vara lämpligt med en sammanfattning. Vi använder den *bokstavskonvention*, som säger att bokstäver i stil med n, m, k och liknande betyder *heltal*, så att det handlar om talföljder; medan x, y, t o.dyl. står för kontinuerliga, *reella* variabler.

Allmänna idéer.

1. Försök med »direkt insättning« (om uttrycket är kontinuerligt). Om det blir ett obestämt uttryck av typ $0/0$, ∞/∞, $\infty - \infty$, 1^∞, ∞^0 etc., fortsätt med t.ex.:

2. Bryt ut dominerande storleksordningar och förkorta (om det är ett bråk).

3. Om $x \to a$, substituera $x = a + t$; om $x \to -\infty$, sätt $x = -t$.

4. Instängningssatsen, om det går att uppskatta uttrycket uppåt och nedåt.

5. Medelvärdessatsen och Taylorutveckling.

Standardgränsvärden.

Då $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{b^x} = 0\ (b > 1). \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0\ (a > 0). \quad \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}. \quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

Då $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ (a > 0). \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Då $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0\ (a > 0).$$

På sidan 30 i detta häfte finns ett »gränsvärdeskör«. Nu är ni mogna att drabba samman med alla problemen där. Men tag inte alla på en gång, utan se det som något att återkomma till då och då.

9.2. En *serie* är ett försök att addera oändligt många tal. Det är *inte detsamma* som en talföljd: skiljetecknet mellan talen är plus i stället för komma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Det är en pedagogisk olycka att serier kallas för serier, eftersom vardagligt språkbruk knappast skiljer på »följd« och »serie«. Ett bra uttryck i stället för serie skulle vara *generaliserad summa*, analogt med generaliserad integral. Men det går knappast att nu ändra på ett månghundraårigt matematikerbruk. . .

Nu gäller det verkligen att ni förstår hur symbolen $\sum$ fungerar. Ett exempel: Följande två uttryck är faktiskt precis samma sak:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k} \qquad \text{och} \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - k}.$$

Ty den vänstra av dem kan uttydas så här:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots,$$

och den högra så här:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \cdots.$$

Om man har svårt att förstå en likhet mellan två summor kan det ofta underlätta att på det här sättet skriva ut några termer i början av serien.

Läs texten i 9.2, med definitioner och exempel. Den geometriska serien hör till allmänbildningen, inklusive formeln för summan när den är konvergent. (**Ex. 2** är av särskilt intresse för ekonomiintresserade.) **Ex. 3** är kanske lite mer kuriöst än de övriga. En mycket viktig sats är Theorem 4. Den borde egentligen formuleras så här:

Sats 4. Om a_n inte går mot 0 då $n \to \infty$, så är serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Detta är nämligen det enda sätt som resultatet kan användas på i praktiken. Som påpekas i texten efter satsen kan det mycket väl vara så att $a_n \to 0$ men likafullt $\sum a_n$ är divergent.

De avslutande satserna 5–7 är enkla men viktiga. Man använder dem ideligen när man undersöker seriers konvergens. **Övningar på sid. 484–485: 1, 5, 7, 16.**

Till räkneövning nr 13

9.3. Här finns ett antal »kriterier« som kan användas för att avgöra om en *positiv* serie (dvs. en serie med ickenegativa termer) är konvergent eller divergent. Att bestämma *summan* av en konvergent serie är i allmänhet ett mycket svårt problem, som man ofta får avstå från att lösa. Integralkriteriet används främst för att avgöra konvergensen hos den så kallade p-serien:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{konvergerar} \iff p > 1,$$

och serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

som omnämns på sid. 487 (och som också den är konvergent precis om $p > 1$). Dessa bör man komma ihåg som standardserier som man jämför andra serier med. Och detta gör man vanligen med hjälp av någon version av jämförelsekriterierna (Theorem 9 och 10). **Ex. 3–5** visar hur det kan gå till. Rot- och kvotkriterierna i slutet av avnittet är mer sällan användbara. De innebär i själva verket jämförelse med geometriska serier, och för att de skall ge besked måste termerna vara endera mycket snabbt avtagande eller snabbt växande. **Gör övningarna 1–12, 15–26 på sid. 494, åtminstone dem med udda nummer.**

9.4. Här studeras serier med termer av varierande tecken. En sådan serie kan transformeras till en positiv serie genom att man sätter belopp på alla termerna. Om den serie man då får är konvergent, så är även den ursprungliga serien konvergent (Theorem 13). I detta fall säger man att den ursprungliga serien är *absolutkonvergent*. Men det finns också serier som konvergerar utan att vara absolutkonvergenta; de sägs vara *betingat* eller *villkorligt* konvergenta. Förklaringen till denna terminologi är att sådana serier har en karaktår av »obestämt uttryck« av formen $\infty - \infty$. Se »Rearranging. . . « på sid. 500.

För att undersöka absolutkonvergens kan man använda alla metoderna från avsnitt 9.3. För betingad konvergens har vi bara en metod i kursen, som ges av sats 14 (som ibland kallas Leibniz' sats). Läs **Ex. 1** och **3–6**. **Lös övningarna 1, 3, 5, 7, 11, 17 på sid. 501.**

På sidan 31 i detta häfte finns »Stora serieköret«, som innehåller ett antal problem som kan vara lämpliga att repetera hela det här avsnittet med. En del av dem, framför allt på slutet, är ganska svåra och får ses som utmaningar för speciellt drivna problemlösare.

Avsnitt 9.5–7 ingår inte i kursen. I avsnitt 9.8 återkommer vi till Taylors formel, om så bara för att göra ett bevis för satsen (som jag tycker är mer handfast än det bevis som finns i avsnitt 4.8).

Till räkneövning nr 14

Nu ska det handla om ordinära differentialekvationer, ODE. En differentialekvation (DE) är en ekvation som innehåller en obekant funktion (t.ex. y)tillsammans med en eller flera av dess derivator. Att *lösa* en DE innebär att bestämma alla funktioner y som satisfierar ekvationen.

DE används för att beskriva många fenomen i naturen och tekniken. De kan också uppstå ur rent geometriska problem. Här är ett sådant, som ni bör fundera på hur det ska formuleras som en DE. Lite senare kommer ni också att kunna lösa den.

Problem. Kurvan $y = f(x)$ ligger helt i första kvadranten ($x > 0$, $y > 0$). Om man drar en tangent till kurvan, så kommer den alltid att skära båda koordinataxlarna på så sätt att tangeringspunkten ligger mitt emellan skärningspunkterna. Bestäm alla kurvor som har denna egenskap!

I kursen ingår tre enkla men viktiga typer av ODE: *separabla*, *linjära av första ordningen* och *linjära av andra ordningen med konstanta koefficienter*. I Adams finns de behandlade på olika ställen i boken, men vi har föredragit att ta dem i ett sammanhang. Några övergripande saker finns i avsnitt 17.1 på sid. 900 och framåt. Ni kan börja med att snabbt skumma igenom det för terminologins skull (om ens det). Sedan går vi rakt på den första sortens ODE, separabla ekvationer. Om dem kan man läsa i avsnitt 7.9, sidan 422 och framåt.

En separabel ekvation är en ekvation som kan skrivas på formen

$$\varphi(y)y' = \psi(x) \quad \text{eller} \quad \varphi(y)\frac{dy}{dx} = \psi(x). \tag{2}$$

Om funktionerna φ och ψ har primitiva funktioner Φ resp. Ψ, så att alltså $\Phi'(y) = \varphi(y)$ och $\Psi'(x) = \psi(x)$, kan ekvationen skrivas

$$\Phi'(y)y' = \Psi'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\big(\Phi(y)\big) = \frac{d}{dx}\Psi(x).$$

Om två funktioner har samma derivata, skiljer de sig som mest med en konstant, dvs. $\Phi(y) = \Psi(x) + C$. Om man använder skrivsättet $\int \varphi(y)\,dy$ för en primitiv funktion till φ (och motsvarande för ψ), betyder detta att man rent formellt kan få lösningen till (3) genom att multiplicera med symbolen dx och integrera:

$$\int \varphi(y)\,dy = \int \psi(x)\,dx.$$

Ex. 1–6 rekommenderas.

Linjära ODE av första ordningen kommer därnäst. Att ekvationen är *linjär* betyder att varje term i ekvationen innehåller den obekanta funktionen y endast i formen y eller y', dvs. ekvationen kan skrivas på formen

$$a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

Här ska man lära sig *metoden*, inte den färdiga formeln mitt på sidan 426. Om man exempelvis har ekvationen

$$y'\cos x + y\sin x = 1, \quad -\pi/2 < x < \pi/2,$$

ska man alltså göra så här:

1. Dividera med $\cos x$, så att koefficienten för y' blir 1:

$$y' + y\tan x = \frac{1}{\cos x}.$$

2. Bestäm en primitiv funktion $\mu(x)$ till koefficienten för y: här kan vi ta $\mu(x) = -\ln\cos x$ (kontrollera!).

3. Den *integrerande faktorn* är sedan $e^{\mu(x)}$; i vårt exempel får vi

$$e^{-\ln\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Ekvationen multipliceras med denna.

4. Vänsterledet kommer då att vara derivatan m.a.p. x av produkten av den integrerande faktorn och den sökta funktionen:

$$\text{V.L.} = \frac{1}{\cos x}(y' + y\tan x) = y'\frac{1}{\cos x} + y\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{d}{dx}\left(y\,\frac{1}{\cos x}\right).$$

Ekvationen kan alltså skrivas

$$\frac{d}{dx}\left(y\,\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{y}{\cos x} = \tan x + C.$$

Nu har vi i princip löst ekvationen. Det återstår bara att lösa ut y:

$$y = \sin x + C\cos x.$$

Lös övningar på sidan 429: nummer 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11. En del av dem är både separabla och linjära. Lös dem i så fall på båda sätten, för övningens skull!

Till räkneövning nr 15

Den tredje sortens ODE som vi tar upp är av typen

$$y'' + ay' + by = g(t),$$

där a och b är konstanter och $g(t)$ är en given funktion, (Att vi använder t som oberoende variabel beror på att den nästan alltid i tillämpningarna betyder tiden.) Först betraktar vi det fall då högerledet är 0; man säger då att ekvationen är *homogen*. Detta behandlas i avsnitt 3.7. Härledningen av lösningen i Adams är inte klanderfri – han lutar sig mot ett resultat som finns i en övning efter avsnittet. Man kan göra på helt andra sätt också. Man kan exempelvis skriva om ekvationen till ett par ekvationer av första ordningen, som löses med integrerande faktor. Hur man nu väljer att motivera det, så är i varje fall den färdiga lösningsmetoden rent mekanisk. Läs **Ex. 1–4** på sid. 202–203. En viktig fysikalisk tillämpning är harmonisk svängning i **Ex. 5–6**. **Lös övningarna 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 och 15 på sid. 206–207.**

Nu återstår *inhomogena* linjära ekvationerna av andra ordningen med konstanta koefficienter, dvs.ekvationer av typen

$$y'' + ay' + by = g(t), \qquad \text{(IH)}$$

där $g(t)$ inte är identiskt noll. Detta behandlas inte alls i Adams, utan vi går här igenom den bakomliggande teorin.

Man studerar ekvationen (IH) *tillsammans* med motsvarande *homogena* ekvation

$$y'' + ay' + by = 0. \qquad \text{(H)}$$

Det är praktiskt att här använda uttryckssätt från den *linjära algebran.* Vi låter D beteckna *deriveringsoperatorn,* dvs. D är en operator som förvandlar en funktion y till dess derivata y':

$$Dy = y'.$$

Låt vidare I vara identitetsoperatorn, dvs. den operator som beskrivs av $Iy = y$. Med hjälp av D och I definierar vi en operator L så här:

$$L = D^2 + aD + bI, \quad \text{dvs.} \quad L(y) = (D^2 + aD + bI)y = D^2y + aDy + by = y'' + ay' + by.$$

Lemma. L är en linjär operator, dvs. och y_1 och y_2 är funktioner och α_1 och α_2 är skalärer (dvs. tal), så gäller

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2).$$

Bevis. Resultatet följer av att derivering är en linjär operation. Utskrivet ser beviset ut så:

$$\begin{aligned} L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) &= (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)'' + a(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)' + b(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \\ &= \alpha_1 y_1'' + \alpha_2 y_2'' + a\alpha_a y_1' + a\alpha_2 y_2' + b\alpha_1 y_1 + b\alpha_2 y_2 \\ &= (\alpha_a y_1'' + a\alpha_1 y_1' + b\alpha_1 y_1) + (\alpha_a y_2'' + a\alpha_2 y_2' + b\alpha_2 y_2) \\ &= \alpha_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + a_2(y_2'' + ay_2' + by_2) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2). \end{aligned}$$

□

Med operatorn L kan vi formulera oss så här: y är en lösning till (H) precis om $L(y) = 0$, och y är lösning till (IH) precis om $L(y) = g$.

Sats 1. Mängden av lösningar till (H) är ett linjärt rum av dimension 2.

Bevis. I vart och ett av de tre fallen (beroende på rötterna till den karakteristiska ekvationen) kan den allmänna lösningen skrivas som en linjärkombination av två »baslösningar«, där koefficienterna är godtyckliga tal. I fall 1 (skilda reella rötter r_1 och r_2) har vi t.ex. $y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$. Lösningsmängden spänns alltså upp av »vektorerna« $y_1 = e^{r_1 t}$ och $y_2 = e^{r_2 t}$, och dessa är linjärt oberoende (ingen av dem är en konstant multipel av den andra). På liknande sätt ser det ut i de båda andra fallen. □

Nu kommer huvudsatsen om lösningarna till (IH):

Sats 2. Låt y_P vara *en* lösning till (IH). Då gäller att en funktion y är lösning till (IH) om och endast det finns en lösning y_H till (H) så att $y = y_P + y_H$.

En sådan speciell lösning y_P brukar kallas en *partikulärlösning* till (IH).

Bevis. Antag först att y är en lösning till (IH). Sätt $z = y - y_P$. På grund av lineariteten gäller då

$$L(z) = L(y - y_p) = L(y) - L(y_P) = g - g = 0,$$

vilket betyder att z är en lösning till (H), som vi kan döpa om till y_H. Därmed är implikationen visad åt ena hållet.

Antag sedan att y är en funktion av formen $y_P + y_H$, där y_H är en lösning till (H). Då får vi

$$L(y) = L(y_P + y_H) = L(y_P) + L(y_H) = g + 0 = g,$$

vilket betyder att y är en lösning till (IH). Detta visar implikationen åt andra hållet. Beviset är klart! □

För att finna alla lösningar till (IH) räcker det alltså med att först 1ösa (H) fullständigt och sedan finna *en* lösning till (IH). Det senare kan man ofta göra genom s.k. intelligenta gissningar. En god princip är att tänka efter: vilken sorts uttryck kan det vara, som när det sätts in i vänsterledet ger det resultat som vi har i högerledet? Man kan använda följande observation:

> Funktioner av typerna
>
> $$\text{polynom, } e^{kt} \text{ och } A\cos\alpha t + B\sin\alpha t$$
>
> samt summor och produkter av dessa typer, har derivator som också är summor och produkter av samma sorts funktioner.

Man *kan* formulera detaljerade regler för hur man ska gissa y_P, men det kan vara onödigt att memorera sådana regler. Man klarar sig ofta med lite sunt förnuft och den inramade iakttagelsen ovan. Om det första försöket misslyckas, kan det löna sig att göra ett nytt försök där man multiplicerar det första med x. Vi ger några exempel.

Exempel 1. Bestäm en partikulärlösning till $y'' + 3y' + 2y = t^2$.

Lösning: Det borde kunna finnas en lösning som är ett andragradspolynom. Ansätt därför $y_P = at^2 + bt + c$, derivera och sätt in:

$$y'_P = 2at + b, \qquad y''_P = 2a,$$
$$\begin{aligned} t^2 &= y''_P + 3y'_P + 2y_P = 2a + 3(2at + b) + 2(at^2 + bt + c) \\ &= 2at^2 + (6a + 2b)t + (2a + 3b + 2c). \end{aligned}$$

Identifikation av koefficienter ger ekvationssystemet

$$2a = 1, \quad 6a + 2b = 0, \quad 2a + 6b + 2c = 0,$$

som har den entydiga lösningen $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = \frac{7}{4}$. En partikulärlösning är alltså $y_P = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{7}{4}$. □

Exempel 2. Samma problem för $y'' + 3y' + 2y = e^{2t}$.

Lösning: En vettig gissning är att det borde finnas en lösning av formen $y_P = ae^{2t}$. Derivering och insättning visar att det går bra om $a = \frac{1}{12}$ (genomför det!). □

Exempel 3. Samma problem för $y'' + 3y' + 2y = e^{-t}$.

Lösning: Om man försöker med $y_P = ae^{-t}$ blir man snopen – sätter man in denna ansats i ekvationen blir vänsterledet lika med noll, och det går inte att välja a så att det blir lika med högerledet. Orsaken till detta är att funktionen e^{-t} är en av lösningarna till motsvarande homogena ekvation. I denna situation brukar det löna sig att *multiplicera den misslyckade ansatsen med t* och försöka igen (kontrollera räkningarna):

$$y_P = ate^{-t}, \quad y'_P = a(1-t)e^{-t}, \quad y''_P = a(t-2)e^{-t},$$
$$e^{-t} = a(t-2)e^{-t} + 3a(1-t)e^{-t} + 2ate^{-t} = ae^{-t}(t - 2 + 3(1-t) + 2t) = ae^{-t}.$$

Med $a = 1$ har vi funnit en lösning! □

Som exempel 3 visar, är det en god idé att *börja med* att bestämma lösningarna till den homogena ekvationen, innan man ansätter en partikulärlösning. En ansats som har samma form som en lösning till den homogena ekvationen fungerar inte!

Föreläsningsanteckningarna bör ge ytterligare exempel på sådant här.

Observera att det nästan alltid går att *kontrollera* lösningen av en DE genom att man deriverar och sätter in i ekvationen. Det är därför inte särskilt ursäktligt att komma med en felaktig lösning!

Några övningar på inhomogena ekvationer:

1. Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' + y = g(t)$, då $g(t)$ ges av

(a) t, (b) e^{2t}, (c) te^{2t}, (d) $\sin t$, (e) $\sin 2t$.

2. Bestäm alla lösningar till $y'' + 4y' + 5y = 10$.

3. Bestäm alla lösningar till $y'' - 4y' + 4y = 2t + 8$.

4. Bestäm alla lösningar till $y'' - 4y = te^t + \sin 2t$.

(SVAR: 1. (a) $y_P = t$. (b) $y_P = \frac{1}{5}e^{2t}$. (c) $y_P = \left(\frac{1}{5}t - \frac{4}{25}\right)e^{2t}$. (d) $y_P = -\frac{1}{2}t\cos t$. (e) $y_P = -\frac{1}{3}\sin 2t$.

2. $y = 2 + e^{-2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$.

3. $y = \frac{1}{2}(t + 5) + e^{2t}(C_1 + C_2 t)$.

4. $y = -e^t\left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{9}\right) - \frac{1}{8}\sin 2t + C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$.)

Blandade problem 4

Sammanfattning och repetition av de sista kursavsnitten. Dessa problem kommer att behandlas vid en av de sista föreläsningarna.

20. Undersök om serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}}{k}$ är konvergent eller divergent.

21. Bestäm de värden på det reella talet a för vilka följande serier konvergerar:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{a-4}{a+1}\right)^n$.

22. Beräkna arean av det plana område som innesluts av HELGE VON KOCHs snöflingekurva!

23. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$(x+1)(x+2)y' - y = 1 \quad (x > -1),$$

som uppfyller $y(0) = 2$.

24. Bestäm den allmänna lösningen differentialekvationen

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + 1.$$

25. En vattenreservoar med volymen 1000 m^3 har blivit förorenad av ett visst ämne så att dettas koncentration är 0,02 viktsprocent. Den dagliga förbrukningen är 20 m^3, och detta ersätts kontinuerligt med rent vatten. Det är också ständigt i rörelse, så att man kan anta att koncentrationen är konstant inom hela reservoaren vid samma tidpunkt. Efter hur många dagar har koncentrationen sjunkit till 10^{-5} viktsprocent?

26. För vilka värden på parametern α konvergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)^{\alpha} \ ?$$

Stora deriveringsköret

Bestäm derivatorna av följande funktioner. (Kom ihåg att det ofta lönar sig att skriva om uttrycket före derivering!)

1. $2x^3 - 5x^2 + \dfrac{3}{x}$	2. $x^3(x^2-1)^2$	3. $\dfrac{x}{1-x^2}$
4. $\dfrac{3x-1}{x^5}$	5. $\sqrt[3]{x}$	6. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$
7. $e^x(x^2-2x+2)$	8. $x \sin x$	9. $x \ln x - x$
10. $\dfrac{1}{\ln x}$	11. $(ax+b)^n$	12. $\sin^3 x$
13. $\sin 3x$	14. $\ln(\sin x)$	15. $\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$
16. $\sqrt{x+\sqrt{x}}$	17. $\ln \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$	18. $\ln \tan \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \right)$
19. $\dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a}$	20. $\arcsin \dfrac{1}{x}$	21. $\arcsin(\sin x)$
22. $\arcsin \sqrt{1-e^{2x}}$	23. $(\sqrt{2})^{\sqrt{1+x^2}}$	24. $e^{x \ln x}$
25. x^x	26. $x^{\sin x}$	27. $(x^3+x)^{\arcsin x}$
28. $\displaystyle\prod_{n=1}^{100} (x^2+n)$	29. $\lvert x \rvert$	

Lilla integralköret

Beräkna följande integraler/primitiva funktioner (1–12; med * markeras extra knepiga uppgifter):

1. $\displaystyle\int_0^4 |x^2-4|\,dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^2}\,dx$ 3. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+2x}$

4. $\displaystyle\int (\ln|x|)^2\,dx$ 5. $\displaystyle\int \frac{\tan x+1}{\cos^2 x}\,dx$ 6. $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{dx}{x+1}$

7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+x^2+x+1}$ 8. $\displaystyle\int_1^3 (x-1)\ln x\,dx$ 9*. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a<b$

10. $\displaystyle\int \cos x\cos 2x\,dx$ 11*. $\displaystyle\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx$ 12. $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{1-e^{-2y}}\,e^{-y}\,dy$

Konvergerar eller divergerar följande integraler (13–15)?

13. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin x}}$ 14. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+\sqrt{x}}$ 15, $\displaystyle\int_0^\infty \left(\tfrac{1}{2}\pi-\arctan x\right)dx$

16. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{3n}\sin\frac{k}{2n}$.

17. En kropp har som basyta en ellips med halva storaxeln a och halva lillaxeln b. Varje snitt vinkelrätt mot storaxeln skär ut en liksidig triangel, Bestäm kroppens volym!

Stora gränsvärdesköret

Undersök om följande gränsvärden (1–29) existerar, och bestäm dem om de gör det!

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+2x+1}{2x^3-x^2+2}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right).$

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^{100}}{(1{,}01)^n}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2^{8n}}{n!}$

5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}+\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[4]{n^3}}{n-\sqrt[5]{n^3}+2n^{3/2}}$

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n^2}{2+\ln n}$

7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}$

8. $\displaystyle\lim_{n\to-\infty} \frac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}$

9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n+3)}{\ln(4^n+5)}$

10. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+100}$

11. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+100}\right)^{n}$

12. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$

13. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \arctan\frac{n^3+3}{2n^2+n+1}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\arctan x}{3\sin 2x}$

15. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x\sin 7x}{6(\cos x-1)}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3\sin(1/x)}{x^2+\cos x^5}$

18. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} \frac{\arcsin x-\frac{1}{6}\pi}{e^x-\sqrt{e}}$

20. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x-x}{\arctan x-x}$

21. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x^3\left(\tan\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)$

22. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{\ln(1+x)-x}$

23. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

24. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^n-1-x^2} \quad (n>0)$

25. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+1}$

26. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+7}$

27. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}\right)^{1/n}$

28. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{ne^n+n}$

29. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^3\left(\frac{1}{x-\sin x}-\frac{1}{x-\arctan x}\right)$

30. Sätt $a_1=\sqrt{2}$ och definiera a_n rekursivt genom $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$. Visa att följden $\{a_n\}$ är konvergent och bestäm gränsvärdet.

31. Visa att talföljden $\{a_n\}$ är konvergent och bestäm gränsvärdet om

a) $a_0=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+a_n}$; b) $a_0=-\frac{1}{5}$, $a_{n+1}=\dfrac{3a_n-1}{a_n+1}$.

Stora serieköret

Konvergerar eller divergerar följande serier (1–20)?

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{7/6}}$ 2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+13)^{5/3}}$ 3. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\sqrt{k}}{\sqrt[3]{k-1}\,(k+2)^2}$

4. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln \ln k}$ 5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$ 6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{e^k - e^{k-1}}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\arctan k}$ 8. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{999}{1000}\right)^k$ 9. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^k$

10. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{k}}{\ln \sqrt[k]{k}}$ 11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}}{k}$ 12. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tan \frac{1}{k}}{\ln k}$

13*. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k} - \ln \frac{k+1}{k-1}\right)$ 14. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\pi \cos \frac{1}{k}\right)$ 15. $\sum_{k=1}^{\infty} k \left(e^{1/k} - e^{\sin(1/k)}\right)$

16. $\sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-2k \ln k}$ 17*. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right)$ 18*. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^{k+1}}$

19. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$ 20. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\ln k)^2}$

21. Är serien $\sum a_k$ konvergent, där $a_k = \dfrac{1}{k^2} \displaystyle\int_2^k \frac{dx}{\ln x}$?

22. a_n är roten till ekvationen $e^x = e^{1/n} + \dfrac{1}{n}$. Undersök om serien $\sum \dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ är konvergent.

23. Visa att ekvationen $x^n + nx - 1 = 0$ har exakt en positiv rot a_n. Konvergerar $\sum a_n$?

24. För vilka a och b är $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{k} + \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right)$ konvergent?

25. För vilka α är $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(-\alpha\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\right)$ konvergent?

26. För vilka α konvergerar
 a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k} - 1\right)^\alpha$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k^2]{k} - 1\right)^\alpha$?

Lösningar till extraövningar

Räkneövning 5. (a) Antag först att $x > 0$. Då kan vi rita (gör det!) en rätvinklig triangel med en katet lika med 1 och den andra lika med x. Den vinkel som står emot denna katet är då lika med $\arctan x$, och den andra icke räta vinkeln är $\arctan(1/x)$. Men summan av dessa vinklar är ju en rät, dvsvi har visat att

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \text{om } x > 0.$$

Om $x < 0$ sätter vi $y = -x$ och använder att arctan är en udda funktion:

$$\begin{aligned}\arctan x + \arctan \frac{1}{x} &= \arctan(-y) + \arctan \frac{1}{-y} = -\arctan y - \arctan \frac{1}{y} \\ &= -\Big(\arctan y + \arctan \frac{1}{y}\Big) = -\frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Svar: Uttrycket är lika med $(\operatorname{sgn} x) \cdot \dfrac{\pi}{2}$.

(b) Först beräknar vi den andra termen. Sätt $u = \arctan \frac{1}{10}$. Då är det klart att $0 < u < \pi/4$ och $\tan u = \frac{1}{10}$. Det följer att $0 < 2u < \pi/2$ och

$$\tan 2u = \frac{2\tan u}{1 - \tan^2 u} = \frac{\frac{2}{10}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{20}{99}\,,$$

så att $2u = \arctan \frac{20}{99}$. Sedan förvandlar vi den första termen till en arctan genom att rita en rätvinklig triangel. Det är uppenbart att $0 < \arcsin \frac{99}{101} < \pi/2$, och vinkeln ligger i en triangel med hypotenusan 101 och motstående katet 99. Pythagoras' sats ger den andra kateten lika med $\sqrt{101^2 - 99^2} = \sqrt{10201 - 9801} = \sqrt{400} = 20$. Det uttryck vi ska beräkna är alltså lika med $\arctan \frac{99}{20} + \arctan \frac{20}{99}$, och problem (a) visar att detta är lika med $\pi/2$.

Svar: Uttrycket är lika med $\pi/2$.

(c) Detta kan redovisas på många sätt. Ett är att notera att $f(x) = \arctan x$ är strängt växande, så att den kan anta värdet $\pi/4$ *högst* en gång; vidare har f värdemängden $]-\pi/2, \pi/2[$, vilket betyder att den antar värdet $\pi/4$ *minst* en gång. Alltså har ekvationen precis *en* lösning (nämligen $x = 1$).

Svar: Ekvationen har en lösning.

Svar till Stora deriveringsköret

1. $6x^2 - 10x - \dfrac{3}{x^2}$
2. $x^2(x^2-1)(7x^2-3)$
3. $\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$
4. $\dfrac{5-12x}{x^6}$
5. $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
6. $\dfrac{1}{8x^{7/8}}$
7. x^2e^x
8. $x\cos x + \sin x$
9. $\ln x$
10. $-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$
11. $na(ax+b)^{n-1}$
12. $3\sin^2 x\cos x$
13. $3\cos 3x$
14. $\cot x$
15. $-\dfrac{3x}{(1+x^2)^{5/2}}$
16. $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$
17. $\dfrac{1}{x^2-1}$
18. $\dfrac{1}{\cos x}$
19. $\dfrac{1}{a^2+x^2}$
20. $\dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
21. $\operatorname{sgn}(\cos x)$ $(x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z})$
22. $-\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
23. $\dfrac{x\ln 2}{2\sqrt{1+x^2}}(\sqrt{2})^{\sqrt{1+x^2}}$
24. $x^x(\ln x + 1)$
25. $x^x(\ln x + 1)$
26. $x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \cos x\ln x\right)$
27. $(x^3+x)^{\arcsin x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln(x^3+x) + \dfrac{3x^2+1}{x^3+x}\arcsin x\right)$
28. $\prod_{n=1}^{100}(x^2+n)\sum_{n=1}^{100}\dfrac{2x}{x^2+n}$
29. $\operatorname{sgn} x,\ x \neq 0$

Svar till Lilla integralköret

1. 16.
2. $x + 2\ln|x-1| - \dfrac{2}{x-1} + C.$
3. $\frac{1}{2}\ln 3.$
4. $x(\ln|x|)^2 - 2x\ln|x| + 2x + C.$
5. $\frac{1}{2}\tan^2 x + \tan x + C.$
6. Divergent.
7. $\pi/4.$
8. $\frac{3}{2}\ln 3.$
9. $\pi.$
10. $\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{6}\sin 3x + C.$
11. $\frac{1}{24}\sin 6x + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{4}x + C.$
12. $\pi/4.$
13. Konv.
14. Konv.
15. Div.
16. $2\left(\cos\frac{1}{2} - \cos\frac{3}{2}\right).$
17. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}ab^2.$

Svar till Stora gränsvärdeskören

1. 2.	2. $\frac{1}{2}$.	3. 0.	4. 0.	5. $\frac{1}{2}$.
6. 2.	7. 1.	8. -1.	9. $\frac{1}{2}$.	10. e.
11. e.	12. $\sqrt{e}$.	13. $\pi/2$.	14. $\frac{1}{3}$.	15. $-\frac{7}{3}$.
16. $\frac{1}{2}$.	17. 0.	18. 1.	19. $2/\sqrt{3e}$.	20. $\frac{1}{2}$.
21. $\frac{1}{3}$.	22. 1.	23. $\frac{1}{2}$.	24. $-1/n$.	25. 1.
26. 1.	27. 1.	28. e.	29. 3.	30. 2.
31. a) 2. b) 1.				

Svar till Stora serieköret

1. Konv.	2. Konv.	3. Div.	4. Div.
5. Konv.	6. Konv. (med summa $\dfrac{-e}{e^2-1}$)		7. Div.
8. Konv. (med summa = 999)		9. Div.	10. Div.
11. Konv.	12. Div.	13. Konv.	14. Konv.
15. Konv.&16. Konv.	17. Div.	18. Div	
19. Konv.	20. Konv.	21. Div.	22. Konv.
23. Div.	24. Div., resp. konv.		25. $a = -e$, $b = e/2$.
26. $\alpha > \frac{1}{2}$ (integraluppskatta $\sum \frac{1}{k}$).			27. a) $\alpha > 1$, b) $\alpha > \frac{1}{2}$.
28. Konv.	29. Gränsvärdet = 1.		30. $K = \frac{3}{2}$.
31. Om $a_n \geq 0$: ja; annars: ej säkert.		32. Motex. för $\varepsilon = 0$ t.ex. $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.	