

Uppgifter till lektion 1

1. Lös olikheten $\left| \frac{2x+1}{x-3} \right| > 3$.

2. Skissa följande kurvor

(a) $y = 1 - x$

(b) $y = 1 - |x|$

(c) $y = |1 - |x||$

(d) $y = ||1 - |x|| - 3|$.

Uppgifter till lektion 2

1. (a) Beräkna, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x^3}$$

(b) Beräkna, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|1 - x^3|}$$

2. Beräkna, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x - 1$$

Uppgifter till lektion 3

1. Definiera funktionen f på följande sätt:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 1 \\ -x^2 + ax + b, & x < 1 \end{cases}$$

- Skissa kurvan $y = f(x)$ för det fall då $a = 2$ och $b = 0$.
 - Obs att $f(1)$ ej är definierat. Vilket värde behöver vi definiera $f(1)$ till för att f ska bli kontinuerlig från höger i punkten $x = 1$?
 - Antag att $f(1)$ är definierat enligt (b). För vilka värden på a och b blir f en kontinuerlig funktion?
2. Om polynomet $p(x)$ vet du följande: Det är ett 4-gradspolynom och $p(-2) = 72$, $p(-1) = -1$, $p(0) = 12$, $p(1) = 21$, $p(2) = -16$, $p(5) = -103$ och $p(6) = 216$. Hur många reella nollställen har $p(x)$? Ungefär var ligger ev nollställen? Gör en skiss av kurvan $y = p(x)$.

Uppgifter till lektion 4

1. Låt

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 4}$$

- Bestäm definitionsmängden D_f samt derivera $f(x)$ och bestäm alla x för vilka $f'(x)$ är positiv, negativ respektive noll.
 - Bestäm intervallen där $f(x)$ är växande respektive avtagande och gör en ungefärlig skiss av kurvan $y = f(x)$.
 - Bestäm alla punkter på kurvan där tangenten är horisontell.
2. Funktionen f definieras på följande sätt:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1, \\ -x^2 + ax + b, & x < 1. \end{cases}$$

- Besäm de värden på a och b för vilka funktionen blir deriverbar överallt. Skissa kurvan $y = f(x)$ i ett sådant fall.
- Undersök, i fallen då funktionen är deriverbar överallt, om funktionen har andraderivata för $x = 1$.

Uppgifter till lektion 5

1. Betrakta kurvan $y = 2x - x^2 - 4$.

- (a) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan i punkten där $x = a$.
- (b) För vilka a gäller att tangentlinjen går genom origo? Rita en skiss!

2. Visa att

$$2x^{3/2} > 3x - 1$$

för alla $x > 1$.

Uppgifter till lektion 6

1. Låt $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$, $x \in \mathbf{R}$.

- (a) Visa att f är inverterbar.
- (b) Bestäm inversens derivata i punkten 1, dvs beräkna $(f^{-1})'(1)$.

2. Betrakta kurvan

$$x^3y + x - y^2 + xy = -2.$$

- (a) Visa att kurvan går genom punkten $(1, -1)$ samt bestäm en ekvation för *tangenten* till kurvan i denna punkt.
- (b) Bestäm en ekvation för *normalen* till kurvan i punkten $(1, -1)$.

Uppgifter till lektion 7

1. Beräkna, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln(x^{5/2} + 7) + 3x^2 \sqrt{35 + x^2}}{x^8 e^{-\sqrt{x}} - x^3 \ln\left(e^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}.$$

2. Sätt $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

- (a) Bestäm f 's definitionsmängd D_f (så stor delmängd av de reella talen som möjligt).

(b) Visa att $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(c) *Frivillig extrauppgift:*

Beräkna $f(0)$ och visa sedan att $f(x) = \arctan x$ för alla $x \in D_f$.

Uppgifter till lektion 8

1. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-x^2} - 1) \sin x}{x \ln(1 + x^2)}.$$

2. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\arctan x - x}.$$