

Linjärt beroende och linjärt oberoende

0.1 Definition. Låt $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ vara vektorer i ett linjärt rum. En *linjärkombination* av dem är en summa

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$$

där $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ är konstanter (reella tal). $\square$

T. ex. är vektorn $(3, 5)$ i 2-rummet en linjärkombination av vektorerna $\vec{e}_1 = (1, 0)$ och $\vec{e}_2 = (0, 1)$:

$$(3, 5) = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2.$$

Kom ihåg att nollvektorn $\vec{0}$ är vektorn av längd 0. I 2-rummet är $\vec{0} = (0, 0)$, och i 3-rummet är $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

0.2 Definition. Vektorerna $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ kallas *linjärt oberoende* om:

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \text{ medför att } \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0. \quad \square$$

Att vektorerna $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ är linjärt oberoende innebär alltså att nollvektorn endast kan skrivas på ett enda sätt som en linjärkombination av dem, nämligen $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_n$.

0.3 Exempel. Vektorerna $\vec{v}_1 = (1, 3)$ och $\vec{v}_2 = (1, 0)$ är linjärt oberoende: Antag att $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = (0, 0)$, dvs $\lambda_1(1, 3) + \lambda_2(1, 0) = (0, 0)$. Då är $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ och $3\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 = 0$, vilket medför att $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_2 = 0$. $\square$

0.4 Exempel. Eftersom $(0, 0) = 4(1, 3) - 2(2, 6)$ så är vektorerna $(1, 3)$ och $(2, 6)$ inte linjärt oberoende. $\square$

En mängd vektorer som inte är linjärt oberoende kallas *linjärt beroende*:

0.5 Definition. Vektorerna $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ kallas *linjärt beroende* om det finns tal $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ej alla $= 0$, så att

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}. \quad \square$$

0.6 Exempel. Vektorerna $\vec{v}_1 = (1, 2, 4)$, $\vec{v}_2 = (3, 0, 2)$ och $\vec{v}_3 = (0, 3, 5)$ är linjärt beroende, eftersom nollvektorn kan skrivas som en icke-trivial linjärkombination av dem:

$$3\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - 2\vec{v}_3 = (0, 0, 0). \quad \square$$

Ett annat sätt att känna igen att en mängd vektorer är linjärt beroende är att se att en av dem kan skrivas som en linjärkombination av de övriga. I ovanstående exempel har vi t ex $\vec{v}_2 = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_3$.

0.7 Påstående. Vektorerna $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ är linjärt beroende om och endast om någon av dem kan skrivas som en linjärkombination av de övriga.

Bevis. ($\implies$): Anta de är linjärt beroende, skriv $\vec{0} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$. Välj ett index i_0 så att $\lambda_{i_0} \neq 0$. Nu ser vi att $\vec{v}_{i_0}$ är en linjärkombination av de övriga:

$$\vec{v}_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \left(\sum_{i \neq i_0} \lambda_i \vec{v}_i \right).$$

($\impliedby$): Antag att t ex $\vec{v}_1$ är en linjärkombination av de övriga $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Säg

$$\vec{v}_1 = \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$$

för några reella tal $\lambda_2, \dots, \lambda_n$. Då gäller ju

$$\vec{v}_1 - \lambda_2 \vec{v}_2 - \dots - \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0},$$

så vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ är linjärt beroende. $\square$

0.8 Definition. $[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$ är en *bas* i 2-rummet (eller 3-rummet) om vektorerna $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ uppfyller:

- (i) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ är linjärt oberoende;
- (ii) varje vektor i 2-rummet (resp 3-rummet) kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. $\square$

0.9 Exempel. $[\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ är en bas i 2-rummet, där $\vec{e}_1 = (1, 0)$ och $\vec{e}_2 = (0, 1)$. $\square$

0.10 Exempel. Vektorerna $\vec{v}_1 = (1, 3)$, och $\vec{v}_2 = (1, 0)$ utgör en bas i 2-rummet. Vi har redan visat att de är linjärt oberoende. Observera att $\vec{e}_1 = \vec{v}_2$, och att $\vec{e}_2 = \frac{1}{3}\vec{v}_1 - \frac{1}{3}\vec{v}_2$. Eftersom $\vec{e}_1$ och $\vec{e}_2$ kan uttrycka alla vektorer, ser vi nu att även $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ kan göra det. T. ex. kan vektorn $(5, 7)$ skrivas

$$(5, 7) = 5\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 = 5\vec{v}_2 + 7\left(\frac{1}{3}\vec{v}_1 - \frac{1}{3}\vec{v}_2\right) = \frac{7}{3}\vec{v}_1 + \frac{8}{3}\vec{v}_2.$$

Alltså är $[\vec{v}_1, \vec{v}_2]$ en bas i 2-rummet. $\square$

Man kan visa att varje bas i 2-rummet består av två vektorer, och att varje bas i 3-rummet består av tre vektorer. Man visar också att varje uppsättning av två linjärt oberoende vektorer i 2-rummet är en bas i 2-rummet (och att tre linjärt oberoende vektorer i 3-rummet är en bas i 3-rummet).

Övningar

1. Avgör om följande vektorer är linjärt beroende eller linjärt oberoende.

- a) $v_1 = (1, 2, 4)$, $v_2 = (3, 0, 2)$, $v_3 = (0, 3, 5)$.
- b) $v_1 = (1, -1, 2)$, $v_2 = (2, 1, -1)$, $v_3 = (1, 2, -1)$.

2. För vilka värden på det reella talet a är följande vektorer linjärt oberoende?

- a) $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 2, a)$, $v_3 = (-1, 0, 1)$.
- b) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (a, 1, 2)$, $v_3 = (1, 2, 2)$.

SVAR: 1a) Linjärt beroende. b) Linjärt oberoende.

2a) Om $a = 1$: linjärt beroende. För $a \neq 1$: linjärt oberoende.

2b) Linjärt oberoende för alla a .