Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich
Inger Sigstam

Energisystem
Kandidat i matematik
Kandidat i fysik
Lärarprogrammet, fristående kurs

Prov i matematik
LINJÄR ALGEBRA OCH GEOMETRI I
2008–01–09

*Skrivtid: 9.00–14.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.*

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = b_1 \\ 2x + 3y + 4z = b_2 \\ x + 4y + 3z = b_3 \end{cases}$$

för följande värden på högerleden:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. a) Visa att matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ är inverterbar, samt bestäm inversen $A^{-1}$.

b) Lös matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -3 & 3 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Lös determinantekvationen $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & x & 2 \\ 2 & x & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ .

VAR GOD VÄND!

4. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Beräkna $\det(A)$.

b) Beräkna kofaktormatrisen $C$ till $A$.

c) Ange den adjungerade matrisen $\mathrm{adj}(A)$.

d) Ange $A^{-1}$.

5. Låt $v = (3, 5)$ och $w = (4, t)$ vara vektorer i planet. Finn $t$ så att a) $v$ och $w$ är parallella, b) $v$ och $w$ är ortogonala, c) vinkeln mellan $v$ och $w$ är $\frac{\pi}{3}$, d) vinkeln mellan $v$ och $w$ är $\frac{\pi}{4}$ .

6. Förklara varför planen $E : 3x - 4y + z = 1$ och $F : 6x - 8y + 2z = 5$ är parallella, samt bestäm avståndet mellan dem.

7. Linjen $L$ i planet går genom origo och bildar vinkeln $\alpha$ med den positiva $x$-axeln, där $0 \leq \alpha < \pi$. Speglingen i $L$ är en linjär operator $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Bestäm dess matris.

8. Den linjära operatorn $T = HGF$ på $\mathbb{R}^3$ är sammansatt av rotationen $F$ kring $x$-axeln med vinkel $\pi$, kontraktionen $G$ med faktor $\frac{1}{3}$, och rotationen $H$ kring $z$-axeln med vinkel $\pi$. Bestäm $T(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}^3$.

LYCKA TILL!