UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
E. Dieterich, R. Rubinsztein,
I. Sigstam, J. Östensson

Prov i matematik
Alla civ.ing.program,
alla kand.program,
NVP, Frist, Lärare

Linjär algebra o geometri 1
2008–08–21

Skrivtid: 9.00 – 14.00. Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp 32 poäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text.

1. Låt $\vec{u} = (2, 1, 1)$ och $\vec{v} = (1, 2, -1)$.

a) Beräkna längden av vektorn $\vec{u} + 2\vec{v}$.

b) Beräkna vektorprodukten $\vec{u} \times \vec{v}$.

c) Beräkna skalärprodukten $\vec{u} \bullet \vec{v}$.

d) Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

e) Bestäm alla värden på talet a så att $\vec{u}$ blir ortogonal mot vektorn $(a, 1 + a, 1 - a)$.

2. Lös matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2+x & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2-x \\ -2-x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2+x & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4. En triangel har sina hörn i punkterna $A = (1, 1, 2)$, $B = (6, 2, 2)$ och $C = (3, 0, 1)$. Beräkna triangelns area, samt bestäm ekvationen för det plan som innehåller triangeln.

5. Lös följande ekvationssystem för alla värden på det reella talet a

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + (1-a)y + 2z = 0 \\ 2x + (2-a)y + a^2 z = 2a - 2. \end{cases}$$

6. Bestäm matrisen (i standardbasen) för den linjära avbildning som geometriskt betyder spegling i planet $x - y - z = 0$.

7. Låt $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ och $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara de linjära avbildningar som ges av $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3,\ x_3 - x_2)$ och $G(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\ x_1 - x_2,\ x_1)$.

a) Bestäm matriserna för avbildningarna $F \circ G$ och $G \circ F$ (i standardbasen).

b) Är $F \circ G$ inverterbar? Är $G \circ F$ inverterbar? Bestäm i förekommande fall inversens matris.

8. Låt A och B vara ändpunkter på en diagonal i en cirkel $\mathcal{C}$. Låt C vara en godtycklig punkt på cirkeln. Visa att $\overrightarrow{AC}$ är vinkelrät mot $\overrightarrow{BC}$.
(*Ledning:* Uttryck vektorerna $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{BC}$ i termer av $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{OC}$.)

LYCKA TILL!

Svar till tentamen i
Linjär algebra o geometri 1 2008–08–21

1. a) $\sqrt{42}$,

b) $\vec{u} \times \vec{v} = (-3, 3, 3)$,

c) $\vec{u} \bullet \vec{v} = 3$,

d) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$,

e) $a = -1$.

2.

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Rötterna är $x_1 = x_2 = -3$, $x_3 = x_4 = -1$.

4. Arean är $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ och planets ekvation är $x - 5y + 7z = 10$.

5. Om $a \neq 0, \pm 2$: $(x, y, z) = \left(\frac{a^2+a-4}{a+2},\ 1,\ \frac{1}{a+2}\right)$,
om $a = 0$: $(x, y, z) = (-1 - t,\ t,\ \frac{1}{2}),\ t \in \mathbb{R}$,
om $a = 2$: $(x, y, z) = (1 - 2s,\ 1,\ s),\ s \in \mathbb{R}$,
om $a = -2$: inga lösningar.

6.

$$[S] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. a)

$$[F \circ G] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad [G \circ F] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Varken $F \circ G$ eller $G \circ F$ är inverterbar.

Lösningar till tentamen i
Linjär algebra o geometri 1 2008–08–21

Lösning till problem 2.

Lösning till problem 3.