UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
I. Sigstam

Prov i matematik
KandMa, KandFy,
Lärare, Fristående kurs

Linjär algebra o geometri 1
2008–10–24

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp 32 poäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Om du är godkänd på duggan ska du inte lämna in uppgift 1.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = b_1 \\ 2x + 3y + z = b_2 \\ 3x + y + 2z = b_3 \end{cases}$$

för följande värden på högerleden:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

2. a) Bestäm inversen till matrisen $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Lös matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & x \\ -1 & 2 & x & 3 \\ 3 & x & 2 & -1 \\ x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Låt $\overrightarrow{a} = (-2, 1, 1)$ och $\overrightarrow{u} = (1, -2, 1)$ två vektorer i 3-rummet.

a) Bestäm (den minsta) vinkeln mellan $\overrightarrow{a}$ och $\overrightarrow{u}$.

b) Skriv vektorn $\overrightarrow{u}$ som en summa $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, där $\overrightarrow{v}$ är parallell med $\overrightarrow{a}$ och $\overrightarrow{w}$ är ortogonal mot $\overrightarrow{a}$.

Var god vänd!

5. En triangel har hörnen $P = (2, 3, 1)$ och $Q = (1, 3, 2)$, och det återstående hörnet R på linjen $(x, y, z) = (2 + t, 4 + t, 3 - t)$, $t \in \mathbb{R}$. Bestäm t så att triangeln PQR får minsta möjliga area, och bestäm även denna area.

6. Ange för vilka värden på den reella konstanten a som ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (1+a)x & + & (1+a)y & - & z & = & 2+a \\ x & & & + & az & = & 2 \\ (1+a)x & & & + & 2z & = & 3+a \end{array}\right.$$

(i) saknar lösning,

(ii) har oändligt många lösningar,

(iii) har en unik lösning. (Observera att ekvationssystemet inte behöver lösas.)

7. Låt l vara skärningslinjen mellan de två planen $\Pi_1 : 6x + 3y + z = 6$ och $\Pi_2 : 3x + y = 3$.

a) Bestäm linjens ekvation på parameterform.

b) Visa att linjen l och planet $\Pi_3 : 3x + 2y + z = 7$ är parallella, och bestäm avståndet mellan l och Π_3.

8. Bestäm matrisen för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som geometriskt betyder spegling i planet $x - z = 0$.

LYCKA TILL!!

Svar till tentamen i
Linjär algebra o geometri 1 2008–10–24

1. a) $(x, y, z) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ b) $(x, y, z) = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ c) $(x, y, z) = (2, 1, 1)$.

2. $X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -60 & 30 \\ 2 & 35 & -16 \end{pmatrix}$.

3. Rötterna är $x_1 = -4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 6,\ x_4 = -2$.

4. a) Vinkeln $2\pi/3$. b) $\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(2, -1, -1)$ och $\overrightarrow{w} = \frac{1}{2}(0, -3, 3)$.

5. Arean minimeras då $t = -1$. Arean är då 1.

6.
- För $a = -1, -2$ saknas lösning.
- För $a = 1$ finns oändligt många lösningar.
- För $a \neq -1, -2, 1$ finns en entydig lösning.

7. a) Linjens ekvation är $(x, y, z) = (1 + t, -3t, 3t)$.

b) Avståndet är $\frac{2}{7}\sqrt{14}$.

8. $[T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$