UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam, 471 3223

Tentamen
Linjär algebra och geometri 1
2007-10-22

Skrivtid: 8.00—13.00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara försedda med förklarande text. Varje uppgift ger högst 5 poäng. Om du är godkänd på del 1 (resp del 2) av duggan ska du inte lämna in uppgift 1 (resp uppgift 2).

1. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y + 2z = b_1 \\ 2y + z = b_2 \\ 2x + y + z = b_3 \end{cases}$$
för följande värden på högerleden:
$$\text{a)} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
   a) Finn elementära matriser E_1, E_2 och E_3 så att $E_3E_2E_1A = I$.
   b) Skriv A som en produkt av elementära matriser.

3. a) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Visa att A är inverterbar, samt bestäm inversen A^{-1}.
   b) Lös matrisekvationen
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Lös ekvationen $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$

5. Låt L vara linjen genom punkten $P_0 = (1, 2, 3)$ parallell med vektorn $\mathbf{a} = (1, -1, 1)$. Låt $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P}$, där P är punkten $P = (2, -1, 0)$.
   a) Bestäm $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$. (Dvs den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{a}$.)
   b) Skriv $\mathbf{u}$ som en summa $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ där $\mathbf{v}$ är parallell med $\mathbf{a}$ och $\mathbf{w}$ är ortogonal mot $\mathbf{a}$.

Var god vänd!

c) Vilken punkt på linjen ligger närmast P? Bestäm det kortaste avståndet mellan P och L.

6. Linjerna L_1 och L_2 ges av

$$L_1: \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x - 4y + z = 7 \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Visa att det finns två parallella plan som innehåller var sin av linjerna. Bestäm även planens ekvationer på normalform.

7. Avbildningen T från $\mathbf{R}^4$ till $\mathbf{R}^3$ ges av

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + 3x_4,\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4,\ x_2 - x_3 + x_4).$$

Bestäm T:s matris. Avgör om det finns $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbf{R}^4$ så att $T(\mathbf{u}) = (7, -1, 3)$ och $T(\mathbf{v}) = (1, 1, 1)$. Ange $\mathbf{u}$ respektive $\mathbf{v}$ i förekommande fall.

8. Låt F och G vara följande linjära operatorer på $\mathbf{R}^3$. Låt F vara rotation $\frac{\pi}{6}$ motsols runt z-axeln, och låt G vara spegling i xz-planet.

   a) Bestäm matrisen för F och matrisen för G.

   b) Bestäm matrisen för den sammansatta avbildningen $G \circ F$, samt beräkna $G \circ F(1, 2, 3)$.

LYCKA TILL !

SVAR Linjär algebra och geometri 1, 2007-10-22.

1. a) $(x, y, z) = (6/5,\ 7/5,\ -4/5)$ b) $(x, y, z) = (7/5,\ 9/5,\ -3/5)$ $(x, y, z) = (1,\ 1,\ -1)$

2. a) Vi har $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Operationen [Rad 2 − 2 rad 1] motsvaras av den elementära matrisen $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
   Operationen [multiplicera rad 2 med $-1/2$] motsvaras av $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.
   Operationen [Rad 1 − 3 rad 2] motsvaras av $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vi har nu $E_3E_2E_1A = I$.
   SVAR: $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ och $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   b) Multiplicera likheten ovan från vänster, först med E_3^{-1}, därefter med E_2^{-1}, och slutligen med E_1^{-1}. Då får man $A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$. Kvar bestämma dessa inverser: $E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ och $E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   SVAR: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   b) Inversen till $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ är $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Multiplicera ekvationen från vänster med A^{-1} och från höger med B^{-1}. Då erhålls $X = A^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Determinanten kan utvecklas till $-12(x-2)(x+1)(x-3)$. (Subtrahera rad 1 från de övriga raderna, bryt ut $x-2$ från den sista raden.)
   SVAR: $x = 2$ eller $x = -1$ eller $x = 3$.

5. a) $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P} = (1, -3, -3)$, och $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{u}}{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}}\mathbf{a} = \dfrac{1}{3}(1,\ -1,\ 1)$.
   b) $\mathbf{v} = \dfrac{1}{3}(1,\ -1,\ 1)$, och $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \dfrac{1}{3}(1,\ -1,\ 1) = \dfrac{2}{3}(1,\ -4,\ -5)$.
   c) Det kortaste avståndet är $||\mathbf{w}|| = \dfrac{2}{3}\sqrt{42}$. Den närmsta punkten är Q så att $\overrightarrow{P_0Q} = \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$. Ortsvektorn för Q är $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0Q} = \overrightarrow{OP_0} +\ \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \dfrac{1}{3}(4,\ 5,\ 10)$.
   SVAR: Närmsta punkten är $Q = \dfrac{1}{3}(4,\ 5,\ 10)$, och det kortaste avståndet är $\dfrac{2}{3}\sqrt{42}$.

6. Linjen L_1 är skärningen mellan de två planen i ekvationssystemet, så dess riktning är ortogonal mot planens normaler. Vi får därför L_1:s riktning genom att beräkna vektorprodukten $(1, 1, -2) \times (3, -4, 1) = -7(1, 1, 1)$. (Man kan också lösa systemet som definierar L_1, då får man ju både en punkt på linjen och dess riktning). På samma sätt kan man finna att riktningen för linjen L_2 är $(1, 1, -3)$.

De båda efterfrågade planens normal är ortogonal mot båda linjerna, så normalen är parallell med $(1,\ 1,\ 1) \times (1,\ 1,\ -3) = -4(1,\ -1,\ 0)$. Punkten $(1,\ -1,\ 0)$ ligger på L_1 och alltså i det ena planet som får ekvationen $(x-1)-(y+1)+0(z-0) = 0$, dvs $x - y = 2$. En punkt i det andra planet är t ex $(1,\ 0,\ 0)$ varför dess ekvation blir $(x-1)-(y-0)+0(z-0) = 0$, dvs $x - y = 1$.
SVAR: Planen är $x - y = 2$ och $x - y = 1$.

7. Börja med att bestämma T:s matris A. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vi söker $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ så att $T(\mathbf{u}) = (7,\ -1,\ 3)$. $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ är alltså lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösningarna kan skrivas $\mathbf{u} = (1 - 2s - t,\ 3 + s - t,\ s,\ t)$ där $s, t \in \mathbf{R}$.

För att finna $\mathbf{v}$ skall ekvationssystemet $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lösas. Detta system saknar lösningar, varför $\mathbf{v}$ som i uppgiften inte finns.
Man löser med fördel båda systemen samtidigt, med de båda högerleden intill varandra.

8. Matrisen för F blir $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (Bestäm $F(1,0,0)$ och skriv i första kolonnen, $F(0,1,0)$ skrivs i andra kolonnen och $F(0,0,1)$ i den tredje kolonnen.) Med samma metod får man att matrisen för G är $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matrisen för $G \circ F$ är $BA = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, och vi har

$$G \circ F(1,2,3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2+\sqrt{3} \\ -1-2\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Svar:$G \circ F(1,2,3) = (\sqrt{3}/2 - 1,\ -\sqrt{3} - 1/2,\ 3)$.