**UPPSALA UNIVERSITET**
**Matematiska institutionen**
Ryszard Rubinsztein
Jörgen Östensson

Prov i matematik
Civilingenjörsprogrammen
F, IT, K, Q, STS, W
Kandidatprogrammen
KandDv och KandKe
LINJÄR ALGEBRA
och GEOMETRI I
2007–12–17

*Skrivtid: 15.00 – 20.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.*

**1.** Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 5x_4 - 4x_5 = 7 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 10x_4 + 9x_5 = -3 \end{cases}$$

**2.** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm $A^{-1}$.

(b) Lös matrisekvationen

$$X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**3.** Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{vmatrix} = 0.$$

**4.** Avgör för vilka värden på den reella konstanten $a$ som ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + (a-3)z = a-2 \\ ax + y + (a-2)z = a+1 \\ 2x + (a+1)y - z = -3 \end{cases}$$

(i) saknar lösning,

(ii) har oändligt många lösningar,

(iii) har unik lösning. (Observera att ekvationssystemet inte behöver lösas.)

**Var god vänd!**

**5.** Avgör för vilka reella tal $A$ som planet $\pi : Ax + y + 3z + 5 = 0$ är parallellt med den räta linjen

$$l : \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 &= 0 \\ 2x + y + z + 2 &= 0 \end{cases}$$

**6.** En triangel har hörnen $A = (1,0,1)$, $B = (1,-1,0)$ och det tredje hörnet $C$ på linjen $(x,y,z) = (t,t,t)$, $t \in \mathbb{R}$. Bestäm $t$ så att triangeln $ABC$ får minsta möjliga area och bestäm även denna area.

**7.** Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den ortogonala projektionen på planet $\pi :\ 2x - y + 2z = 0$. Bestäm $T$:s standardmatris $[T]$.

**8.** (a) Visa att om $A$ är en kvadratisk matris sådan att $A^k = 0$ för något positivt heltal $k$, så är $I - A$ inverterbar med inversen

$$I + A + A^2 + ... + A^{k-1}.$$

(b) Ge ett exempel på en kvadratisk matris $A \neq 0$ sådan att $A^2 = 0$. Finn inversen till matrisen $I - A$ för ditt val av $A$.

**LYCKA TILL!**

**GOD JUL och GOTT NYTT ÅR!**

**Svar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA och GEOMETRI I 2007–12–17**

**1.**

**2.**

**3.**

**4.**

**5.**

**6.**

**7.**

**8.**

## Lösningar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA och GEOMETRI I 2007–12–17

**Lösning till problem 1.**

**Lösning till problem 2.**

**Lösning till problem 3.**

**Lösning till problem 4.**

**Lösning till problem 5.**

**Lösning till problem 6.**

**Lösning till problem 7.**

**Lösning till problem 8.**