UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jörgen Östensson
Ryszard Rubinsztein

Prov i matematik
Civilingenjörsprogrammen
F, IT, K, Q, STS, W, X, Xbio,
Kandidatprogrammen
KandDv, KandKe samt
Gymnasielärare, Fristående
LINJÄR ALGEBRA
och GEOMETRI I
2008–03–27

Skrivtid: 15.00 – 20.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 - 10x_3 + x_4 + 5x_5 = 8 \\ x_1 - 3x_3 - x_4 + x_5 = -1 \end{cases} .$$

2. Lös matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & x-1 \\ x-1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x+3 & x+4 \\ x & x+2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} (2-a)x + y + 2z = 3 \\ (3-a)x + y + z = 2 \\ 2x + ay + z = 2 \end{cases}$$

för alla värden på den reella konstanten a.

5. Låt l vara linjen $(x, y, z) = (1 + t, 2 + 2t, 3 + t)$, $t \in \mathbb{R}$. Bestäm avståndet mellan linjen l och punkten $P = (3, 9, 5)$, samt den punkt Q på linjen l som ligger närmast punkten P.

Var god vänd!

6. Planet π innehåller linjen $l : (x, y, z) = (\,1 + t,\ 2 + 2t,\ 3 + t\,),\ t \in \mathbb{R}$, och är parallellt med linjen

$$k : \begin{cases} x + y + 2z + 1 & = & 0 \\ 2x + y + z + 2 & = & 0 \end{cases} .$$

Bestäm avståndet mellan linjen k och planet π.

7. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling i planet $\pi :\ x - 2y + z = 0$.

(a) Finn T:s standardmatris $[T]$.

(b) Bestäm ekvationen på parameterform för den räta linje som är bilden av linjen $l : (x, y, z) = (\,1 + t,\ -t,\ -t\,),\ t \in \mathbb{R}$, under avbildningen T.

8. (a) Låt A vara en kvadratisk matris sådan att

$$A^3 + 5A^2 + 6A + I = 0.$$

Visa att matrisen A är inverterbar och finn dess invers.

(b) Låt B vara en kvadratisk matris skild från 0-matrisen sådan att

$$B^3 + 5B^2 + 6B = 0.$$

Måste matrisen B vara inverterbar? (Bevisa eller ge motexempel.)

LYCKA TILL!

Svar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA och GEOMETRI I 2008–03–27

1. Lösningarna är $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2 + 3s - t, 1 - s + 2t, s, 3, t), s, t \in \mathbb{R}$.

2.

$$X = \begin{pmatrix} 24 & -12 \\ -2 & 1 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}.$$

3. Rötterna är $x = 2,\ 3,\ -3$.

4. $a \neq 1, 3: \quad (x, y, z) = \left(\frac{1}{3-a}, -\frac{1}{3-a}, \frac{4-a}{3-a} \right)$,
$a = 1: \quad (x, y, z) = (\, t,\ 1 - 3t,\ 1 + t\,)$,
$a = 3:$ inga lösningar.

5. Avståndet är $\sqrt{3}$, punkten är $Q = (4, 8, 6)$.

6. Avståndet är $1/\sqrt{2}$.

7. (a)

$$[T] = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) $l' : (x, y, z) = \left(\frac{2}{3} + \frac{s}{3},\ \frac{2}{3} + \frac{s}{3},\ -\frac{1}{3} - \frac{5s}{3} \right), s \in \mathbb{R}$.

8. (a) $A^{-1} = -(A^2 + 5A + 6I)$.
(b) Nej, tag t.ex. en 2×2-matris

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

där b är ett reellt tal som löser ekvationen $b^2 + 5b + 6 = 0$ dvs. $b = -2$ eller $b = -3$.

Lösningar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA och GEOMETRI I 2008–03–27

Lösning till problem 1.

Lösning till problem 2.

Lösning till problem 3.

Lösning till problem 4.

Lösning till problem 5.

Lösning till problem 6.

Lösning till problem 7.

Lösning till problem 8.