

Tillämpningar inom fysiken, Lektion 1

En vektor är ett objekt som har storlek och riktning, till exempel hastighet, förflyttning eller kraft.

Exempel 1

Om ett flygplan flyger i riktning nordväst med farten 800km/h kan vi beskriva hastigheten med en vektor $\mathbf{v}$ med storlek 800 och riktning nordväst. Om vi inför ett koordinatsystem där x -axeln pekar österut och y -axeln pekar norrut kan vi representera vektorn med ett talpar, $\mathbf{v} = (x, y)$. Riktningen nordväst motsvarar vinkeln $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, om vinkeln mäts i radianer. Vi får $\cos \alpha = \frac{x}{800}$ och $\sin \alpha = \frac{y}{800}$, dvs $\mathbf{v} = (-\frac{800}{\sqrt{2}}, \frac{800}{\sqrt{2}})$.

Exempel 2

Ett UFO befinner sig på 1000m avstånd i sydöstlig riktning, 45 grader över horisonten. Vi kan beskriva UFO:ts position med en vektor $\mathbf{v}$ med storleken 1000 och riktningen sydost, 45 grader över horisonten. Vi inför igen ett koordinatsystem, för att beskriva vektorn med en taltrippel. Låt x -axeln peka söderut, y -axeln österut, och z -axeln uppåt. Nu är $\mathbf{v} = (x, y, z)$. $\sin 45 = \frac{z}{1000}$, ger oss $z = \frac{1000}{\sqrt{2}}$. Komponenten av $\mathbf{v}$ som ligger i xy -planet har längden $1000 \cos 45 = \frac{1000}{\sqrt{2}}$. Det följer att $x = \frac{1000}{\sqrt{2}} \cos 45 = 500$ och $y = \frac{1000}{\sqrt{2}} \sin 45 = 500$. I vårt koordinatsystem har vi alltså $\mathbf{v} = (500, 500, \frac{1000}{\sqrt{2}})$.

Exempel 3

En bil kör med hastigheten 50km/h norrut. En vimpel på bilens tak visar att vinden kommer från väst. Om bilen kör 100km/h visar vimpeln att vinden kommer från nordväst. Utifrån dessa fakta kan vi bestämma vindens egentliga riktning och storlek. Vi inför ett koordinatsystem där x -axeln pekar österut och y -axeln pekar norrut. Bilens hastighet ger upphov till en fartvind som är lika stor, men motsatt riktad till bilens hastighet. Låt $\mathbf{v} = (x, y)$ beteckna den egentliga vindens hastighet. Vinden som märks på biltaket är summan av den egentliga vinden och fartvinden. Vi får två ekvationer.

$$(i) \quad (x, y) + (0, -50) = (\alpha, 0), \quad \alpha > 0$$

$$(ii) \quad (x, y) + (0, -100) = (\beta, -\beta), \quad \beta > 0$$

Den första ekvationen visar att $y = 50$. Om vi sätter in $y = 50$ i den andra ekvationen ser vi att $\beta = 50$, men då är $(x, y) = (50, -50) + (0, 100) =$

(50, 50). Det betyder att vindhastigheten pekar åt nordost, dvs det blåser från sydväst. Vindhastigheten är $|\mathbf{v}| = \sqrt{50^2 + 50^2}/3,6 \approx 19,6\text{m/s}$.

Exempel 4

En 500m bred flod flyter från väst till öst med hastigheten 3km/h. Du kan ro med hastigheten 5km/h i stilla vatten, startar vid den södra stranden, och vill komma till norra stranden, rakt norr om dig. I vilken riktning skall du ro och hur lång tid tar roddturen? Igen fixerar vi ett koordinatsystem där x -axeln pekar österut och y -axeln pekar norrut, med origo där roddturen startar. Beteckna båtens hastighet relativt vattnet med $\mathbf{v}_{rel}$. Eftersom du kan ro i 5km/h på stilla vatten är $\mathbf{v}_{rel} = 5(\cos \alpha, \sin \alpha)$, där $0 < \alpha < \pi$ är okänd. Den faktiska hastigheten $\mathbf{v} = (x, y)$ är summan av hastigheten du rör med och vattnets hastighet, dvs $(x, y) = \mathbf{v}_{vatten} + \mathbf{v}_{rel} = (3, 0) + 5(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Eftersom vi vill ro rakt norrut är $\mathbf{v}_{vatten} + \mathbf{v}_{rel} = (0, \beta)$, $\beta > 0$. Om vi tittar i första koordinaten ser vi att $3 + 5\cos \alpha = 0$, så $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, och $\alpha = \cos^{-1}(-\frac{3}{5})$. Om vi vill bestämma koordinaterna för $\mathbf{v}$ använder vi $\cos \alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - (-\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$, så $\mathbf{v}_{rel} = (-3, 4)$. För att beräkna tiden använder vi $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{vatten} + \mathbf{v}_{rel} = (0, 4)$, så det tar $0,5/4\text{h} = 7\text{min } 30\text{s}$ att korsa floden.

Exempel 5

Tre krafter $\mathbf{F}_1 = (1, 5)$, $\mathbf{F}_2 = (-1, 2)$, $\mathbf{F}_3 = (1, 5)$ verkar på ett föremål med massan 1g. Vi bestämmer föremålets acceleration. Newtons andra lag säger att $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. För att räkna ut den resulterande kraften tar vi summan av de verkande krafterna, så $\mathbf{F} = (1, 12)$, och $\mathbf{a} = 1000\mathbf{F}$. Accelerationens storlek är $|\mathbf{a}| = \sqrt{1000^2 + 12000^2}$, och dess riktning är $\tan^{-1}(12)$.

HT2008, Albin Eriksson Östman