UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam, tel: 471 3223

Tentamen i matematik
LOGIK MN1
2005-01-10

Skrivtid: 8-13. Tillåtna hjälpmedel: Bifogat blad innehållande regler för sekventkalkylen. Motivera samtliga lösningar noga. Maximalpoäng för uppgifterna anges inom parentes. För betygen Godkänd/Väl godkänd krävs vanligen 18 respektive 28 poäng.

1. Låt $\mathcal{L} = \langle P, Q, f\rangle$ vara ett språk av typ $\tau = \langle 1, 2; 2; 0\rangle$. Betrakta strukturen $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N}, P^N, Q^N, f^N\rangle$ med de naturliga talen som universum, där $P^N = \{n \in \mathbf{N} : n \text{ primtal }\}$, $Q^N = \{(n, m) : n < m\}$ och $f^N(n, m) = n + m$. Översätt följande till predikatlogiska satser i språket $\mathcal{L}$:

   a) Varje naturligt tal är summan av två primtal.

   b) Om det finns ett största primtal, så finns för varje naturligt tal ett mindre naturligt tal. (5)

2. Låt M vara det tre-ställiga minoritetskonnektivet, dvs $M(p, q, r)$ är falsk i valueringen v om och endast om *högst en av* p, q och r är falsk i valueringen v.
   Visa att $\{M, \perp\}$ är en funktionellt komplett mängd av konnektiver. Ange också en formel på disjunktiv normalform (DNF) som är ekvivalent med $M(p, q, r)$. (5)

3. Om $\mathcal{D}$ är ett bevisträd i naturlig deduktion i satslogiken, låt $h(\mathcal{D})$ beteckna höjden av trädet $\mathcal{D}$ (dvs längden av den längsta grenen i $\mathcal{D}$).

   a) Ange en rekursiv definition av $h(\mathcal{D})$.

   b) För varje $n \geq 2$, ange ett bevisträd $\mathcal{D}_n$ sådant att $h(\mathcal{D}_n) = n$. (5)

4. Konstruera bevisträd i naturlig deduktion som visar följande.

   (a) $\neg p \longrightarrow (q \vee r),\ \neg q \longrightarrow (p \vee \neg r),\ q \longrightarrow p \vdash p$

   (b) $\vdash \forall x\big(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{Q}(y)\big) \longleftrightarrow \big(\exists x \overline{P}(x) \longrightarrow \overline{Q}(y)\big)$ (5)

5. Avgör med hjälp av sekventkalkyl om följande utsagor på formen $\Gamma \models \varphi$ gäller. Motivera noggrant! För en utsaga som inte gäller avläs ett motexempel från sekventträdet.

   (a) $\exists x \overline{P}(x) \longrightarrow \overline{Q}(\overline{c}) \models \forall x\big(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{Q}(x)\big)$

   b) $\forall x\big(\overline{R}(x) \longrightarrow \overline{R}(\overline{F}(x))\big),\ \exists x \overline{R}(x) \models \exists x\, \overline{R}(\overline{F}(\overline{F}(x)))$ (5)

Var god vänd!

6. Låt $\overline{P}$ och $\overline{Q}$ vara ett-ställiga relationssymboler. Visa på valfritt sätt att

$$\vdash \exists x \left(\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(x)\right) \longrightarrow \exists x \overline{P}(x) \wedge \exists x \overline{Q}(x)$$

och att

$$\not\vdash \exists x \overline{P}(x) \wedge \exists x \overline{Q}(x) \longrightarrow \exists x \left(\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(x)\right).$$

Motivera noggrant! (4)

7. Låt φ_1, φ_2 och σ vara följande formler i språket $\mathcal{L} = \langle \overline{P},\ \overline{Q},\ \overline{R}, \overline{c} \rangle$ av typ $\tau = \{1, 2, 1; -; 1\}$.

$$\begin{aligned}\varphi_1 :& \forall x \forall y \big(\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(x, y) \longrightarrow \overline{R}(y)\big)\\ \varphi_2 :& \exists x \left(\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(x, \overline{c})\right)\\ \sigma :& \exists z\, \overline{R}(z)\end{aligned}$$

a) Visa genom att resonera semantiskt, dvs medelst strukturer, att $\varphi_1,\ \varphi_2 \models \sigma$.

b) Använd sekventkalkyl för att visa att $\varphi_1,\ \varphi_2 \models \sigma$.

c) Konstruera ett bevisträd i naturlig deduktion som visar att $\varphi_1,\ \varphi_2 \vdash \sigma$. (6)

8. a) Definiera vad som menas med att en delmängd Γ av PROP är maximalt konsistent.

b) En delmängd Γ av PROP kallas *fullständig* om för varje σ i PROP det gäller antingen att $\Gamma \vdash \sigma$ eller $\Gamma \vdash \neg\sigma$.
Visa att varje maximalt konsistent delmängd Γ av PROP är fullständig. (5)

LYCKA TILL !