UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam, tel: 471 3223

Tentamen i matematik
LOGIK MN1
2006-01-12

Skrivtid: 9-14. Tillåtna hjälpmedel: Bifogat blad innehållande regler för sekventkalkylen. Motivera samtliga lösningar noga. Maximal poäng för varje uppgift är angivet inom parentes. För betygen Godkänd/Väl godkänd krävs vanligen 18 respektive 28 poäng.

1. Betrakta språket $\mathcal{L} = \langle \overline{P}, \overline{L}, \overline{T} \rangle$ av typ $\langle 1, 1, 2; -; 0 \rangle$. Låt $\mathcal{A} = \langle A, P, L, T \rangle$ vara följande struktur. A är mängden av alla punkter och linjer i ett givet plan. P är mängden av alla punkter i planet, L är mängden av alla linjer i planet, samt $T(a, b)$ omm punkten a ligger på linjen b. Formalisera följande utsagor $\varphi_1, \varphi_2, \sigma$ i språket $\mathcal{L}$.

   φ_1 : Det finns minst tre olika punkter.

   φ_2 : För varje par av två olika punkter finns minst en linje som innehåller båda punkterna.

   σ : Det finns tre olika linjer.

   Avgör sedan om $\varphi_1, \varphi_2 \models \sigma$. (5)

2. För följande begrepp, ange deras *definition* samt ange om begreppet är syntaktiskt eller semantiskt.

   (a) Mängden Γ är *konsistent*.

   (b) Satsen $\sigma \in$PROP är en *tautologi*.

   (c) $\Gamma \models \sigma$, där $\Gamma \cup \{\sigma\}$ är en mängd av slutna predikatlogiska formler.

   (d) Mängden Γ av predikatlogiska formler är *satisfierbar*.

   (e) $\Gamma \vdash \sigma$, där $\Gamma \cup \{\sigma\} \subseteq$PROP. (5)

3. Visa att $\{\longrightarrow, \bot\}$ är en funktionellt komplett mängd av konnektiver, och att mängden $\{\longrightarrow\}$ inte är funktionellt komplett. (5)

4. Konstruera härledningar i naturlig deduktion som visar följande:

   (a) $\vdash (\varphi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

   (b) $\varphi \vee (\psi \longrightarrow \sigma),\ \neg\sigma,\ \psi \vdash \varphi$

   (c) $\forall x\, \exists y\, \big(\overline{f}(y) \doteq x\big) \vdash \forall x\, \overline{P}(\overline{f}(x)) \longrightarrow \forall x\, \overline{P}(x)$ (6)

5. Antag att Γ och Σ är mängder av predikatlogiska formler som inte innehåller någon fri förekomst av variabeln x. Låt φ och ψ vara godtyckliga formler, och låt $\mathbf{Q}$ vara en av symbolerna $\forall$ och $\exists$. Antag att

   $$\Gamma \vdash \varphi \longrightarrow \psi \quad \text{och} \quad \Sigma \vdash \mathbf{Q}x\, \varphi.$$

   Visa att $\Gamma \cup \Sigma \vdash \mathbf{Q}x\, \psi$. (4)

Var god vänd!

6. Låt v vara en valuering av PROP, och låt $\Gamma = \{\varphi \in \mathrm{PROP} : v(\varphi) = 1\}$. Visa att Γ är en maximalt konsistent mängd av satser. (5)

7. Avgör med hjälp av sekventkalkyl om följande påståenden på formen $\Gamma \models \sigma$ gäller. Motivera noga.

   a) $p \vee q,\ \neg p \vee \neg r,\ r \longrightarrow \neg q\ \models\ r$

   b) $\forall x\big(\overline{P}(x) \longrightarrow \neg\overline{Q}(x)\big),\ \forall x \exists y\big(\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(y)\big) \models \forall x\big(\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(x)\big)$

   c) $\models \forall x\, \overline{P}(x) \wedge \forall x\, \overline{Q}(x) \longleftrightarrow \forall x\, \big(\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(x)\big)$ (6)

8. Formulera och bevisa kompakthetssatsen för predikatlogiken. (Du får använda fullständighetssatsen i ditt bevis om du vill.) (4)

LYCKA TILL !!