UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam, tel: 471 3223

Tentamen i matematik
LOGIK MN1
2006-05-30

Skrivtid: 9-14. Tillåtna hjälpmedel: Bifogat blad innehållande regler för sekventkalkylen. Motivera samtliga lösningar noga. Maximal poäng för varje uppgift är angivet inom parentes. För betygen Godkänd/Väl godkänd krävs vanligen 18 respektive 28 poäng.

ENGLISH VERSION, SEE NEXT PAPER !

1. Låt $\mathcal{L} = \langle \overline{f}, \overline{g}, \overline{c} \rangle$ vara ett första ordningens språk av typ $\tau = \langle -;\ 2, 2;\ 1 \rangle$. Betrakta strukturen $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N}, +, \cdot, 1 \rangle$. Ett naturligt tal kallas *jämnt* om det är $2n$ för något naturligt tal n, och det kallas *udda* om det är lilka med $2n + 1$ för något naturligt tal n.

   a) Ange formler $\varphi(x)$ och $\psi(x)$ i $\mathcal{L}$ så att deras respektive tolkningar i $\mathcal{N}$ är:

   $$\begin{array}{ll} \varphi(x): & x \text{ är jämnt.} \\ \psi(x): & x \text{ är udda.} \end{array}$$

   b) Ange en sluten formel (sats) σ i $\mathcal{L}$ så att dess tolkning i $\mathcal{N}$ is:

   Inga udda tal är jämna.

   c) Låt σ vara satsen i problem b). Tolka σ i strukturen $\mathcal{R} = \langle \mathbf{R}, +, \cdot, 1 \rangle$.
   Vilket sanningsvärde har σ i $\mathcal{R}$? (5)

2. Konstruera bevisträd i naturlig deduktion för följande.

   a) $\vdash \psi \vee \neg\psi$
   b) $\vdash \big((\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow \psi\big) \longleftrightarrow (\varphi \vee \psi)$
   c) $\vdash \big(\exists x \overline{P}(x) \longrightarrow \forall x \overline{Q}(x)\big) \longleftrightarrow \forall x \big(\overline{P}(x) \longrightarrow \forall x \overline{Q}(x)\big)$ (7)

3. Låt $\mathcal{P}$ vara den delmängd av PROP som fås genom att endast använda satssymbolerna p_i, $i \in \mathbf{N}$, och konnektiverna $\vee$ och $\longleftrightarrow$.

   a) Ge en induktiv definition av mängden $\mathcal{P}$.
   b) Visa att $\mathcal{P}$ är satisfierbar.
   c) Är mängden $\{\vee, \longleftrightarrow\}$ funktionellt komplett? Motivera ditt svar! (5)

4. Betrakta språket $\mathcal{L} = \langle \overline{P} \rangle$ av typ $\tau = \langle 2;\ -;\ 0 \rangle$ och strukturerna

   $$\begin{array}{lcl} \mathcal{A}_1 & = & \langle \mathbf{N}, < \rangle \\ \mathcal{A}_2 & = & \langle \mathbf{R}, < \rangle \\ \mathcal{A}_3 & = & \langle \mathcal{P}(\mathbf{N}), \subset \rangle \end{array}$$

   där som vanligt $\mathbf{R}$ betecknar mängden av reella tal och $\mathbf{N}$ mängden av naturliga tal, $A \subset B$ betyder att A är en delmängd av B och $A \neq B$. $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ betecknar mängden av alla delmängder till $\mathbf{N}$.
   Ge satser σ_1, σ_2 och σ_3 så att varje sats σ_i är sann i strukturen $\mathcal{A}_i$ och falsk i de två övriga strukturerna. (6)

Var god vänd!

5. Använd sekventkalkyl för att avgöra huruvida följande påståenden på formen $\Gamma \models \varphi$ gäller eller ej. Om ett påstående inte gäller, läs också av ett motexempel från sekventträdet. Om ett påstående gäller, konstruera ett bevis i naturlig deduktion för $\Gamma \vdash \varphi$.

   a) $p \longrightarrow (r \longrightarrow q) \models (p \longrightarrow r) \longrightarrow q$

   b) $\forall x \forall y \big(\overline{G}(x) \wedge \overline{N}(x,y) \longrightarrow \overline{L}(y)\big),\ \exists x \big(\overline{G}(x) \wedge \overline{N}(x,\overline{a})\big) \models \exists z\, \overline{L}(z)$

   c) $\forall x \big(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{Q}(\overline{a})\big),\ \forall x \big(\overline{Q}(x) \longrightarrow \overline{R}(x)\big) \models \forall x \big(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{R}(x)\big)$ (7)

6. Visa att
$$\vdash \big(\exists x\, \overline{P}(x) \longrightarrow \forall x\, \overline{Q}(x)\big) \longrightarrow \forall x \big(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{Q}(x)\big)$$
och att
$$\nvdash \forall x \big(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{Q}(x)\big) \longrightarrow \big(\exists x\, \overline{P}(x) \longrightarrow \forall x\, \overline{Q}(x)\big)$$
där $\overline{P}$ och $\overline{Q}$ är unära relationssymboler. Var noga med förklaringarna! (5)

7. Låt $A = \{a_i : i \in \mathbf{N}\}$ vara en uppräknelig mängd. Anta att P är en egenskap som delmängder av A kan ha. En delmängd $\Gamma \subseteq A$ kallas en *P-mängd* om Γ har egenskapen P. Mängden Γ kallas en *maximal P-mängd* om

   (i) Γ är en P-mängd, och

   (ii) om $\Gamma \subseteq \Gamma'$ och Γ' är en P-mängd, så är $\Gamma = \Gamma'$.

   Anta följande (A) och (B) om egenskapen P:

   (A) Varje delmängd av en P-mängd är en P-mängd.

   (B) Om $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ är en kedja av P-mängder, så är även mängden $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ en P-mängd.

   Visa att varje P-mängd kan utvidgas till en maximal P-mängd.
   (Dvs visa att om $\Gamma \subseteq A$ är en P-mängd, så finns en maximal P-mängd $\Gamma^* \subseteq A$ så att $\Gamma \subseteq \Gamma^*$.) (5)

LYCKA TILL !!