UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam

Boolesk algebra

Definition

En *Boolesk algebra* är en struktur

$$\mathcal{B} = \langle B, \sqcup, \sqcap, \sim, 0, 1 \rangle$$

där $0 \in B$, $1 \in B$, $0 \neq 1$ och operationerna $\sqcup$ och $\sqcap$ är binära, och $\sim$ är unär, och följande gäller:

(1) $(a \sqcup b) \sqcup c = a \sqcup (b \sqcup c)$ och $(a \sqcap b) \sqcap c = a \sqcap (b \sqcap c)$ (associativitet).

(2) $a \sqcup b = b \sqcup a$ och $a \sqcap b = b \sqcap a$ (kommutativitet).

(3) $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$ och $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$ (distributivitet).

(4) $\sim (a \sqcup b) = (\sim a) \sqcap (\sim b)$ och $\sim (a \sqcap b) = (\sim a) \sqcup (\sim b)$ (de Morgans lagar).

(5) $a \sqcup a = a$ och $a \sqcap a = a$.

(6) $a \sqcup 0 = a$ och $a \sqcap 0 = 0$.

(7) $a \sqcup 1 = 1$ och $a \sqcap 1 = a$.

(8) $a \sqcap \sim a = 0$ och $a \sqcup \sim a = 1$.

Anm: Det finns kortare sätt att definiera Boolesk algebra.

Övningar

I följande övningar, låt $\mathcal{B} = \langle B, \sqcup, \sqcap, \sim, 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra.

1. Visa att det bara finns ett element 0 som uppfyller (6).
   (*Ledning:* Anta det finns 0 och $0'$ som uppfyller (6). Visa att $0 = 0'$.)

2. Visa att det bara finns ett element 1 som uppfyller (7).

3. Elementet a' kallas för ett *komplement* till elementet a om $a \sqcup a' = 1$ och $a \sqcap a' = 0$.
   Visa att $\sim a$ är ett komplement till $a \in B$, och att $\sim a$ är det enda komplementet till a.
   Dvs visa att om a' uppfyller att $a \sqcup a' = 1$ och $a \sqcap a' = 0$, så måste $a' = \sim a$.
   Ledning: Använd att $a' = a' \sqcap 1 = a' \sqcap (a \sqcup \sim a)$.

4. Definiera en relation $\sqsubseteq$ genom

$$a \sqsubseteq b \Longleftrightarrow a \sqcap b = a.$$

   Visa att $\sqsubseteq$ är en partiell ordning på B. Du behöver visa att

   (a) $a \sqsubseteq a$ för alla $a \in B$. (Reflexivitet.)

(b) Om $a \sqsubseteq b$ och $b \sqsubseteq c$, så $a \sqsubseteq c$. (Transitivitet.)

(c) Om $a \sqsubseteq b$ och $b \sqsubseteq a$, så $a = b$. (Antisymmetri.)

5. Alltså är B med $\sqsubseteq$ en partiell ordning med största element 1 och minsta element 0. (Ett *största element* i en partiell ordning $(A; \leq)$ är ett element $s \in A$ sådant att $a \leq s$ för alla $a \in A$. Ett *minsta element* är ett element $m \in A$ så att $m \leq a$ för alla $a \in A$.) Observera att det största elementet i en partiell ordning (om det existerar) är unikt, för om det finns två största element s och s' så måste $s \leq s'$ och $s' \leq s$, och det följer av antisymmetri att $s = s'$. På liknande sätt inses att det minsta elementet (om det existerar) är unikt.

6. Låt $c = a \sqcap b$.

   (a) Visa att $c \sqsubseteq a$ och $c \sqsubseteq b$, dvs visa att c är en undre gräns till a och b.

   (b) Anta att $x \in B$ är så att $x \sqsubseteq a$ och $x \sqsubseteq b$. Visa då att $x \sqsubseteq c$. Detta visar att c är den största undre gränsen till a och b.

   Den största undre gränsen till a och b brukar kallas för *infimum* av a och b, $\inf\{a, b\}$.

7. Den minsta övre gränsen till a och b brukar kallas för *supremum* av a och b, $\sup\{a, b\}$. Visa att $a \sqcup b$ är supremum av a och b med avseende på ordningen $\sqsubseteq$. (Låt $d = a \sqcup b$. Du behöver visa att d är en övre gräns till a och b, och att d är den minsta övre gränsen (dvs om x är en annan övre gräns så måste $d \sqsubseteq x$).)

Vi har visat föjande sats.
Sats 1: *Låt $\mathcal{B} = \langle B, \sqcup, \sqcap, \sim, 0, 1\rangle$ vara en Boolesk algebra, och definiera relationen $\sqsubseteq$ på B genom*

$$a \sqsubseteq b \iff a \sqcap b = a.$$

Då är $(B, \sqsubseteq)$ en partiell ordning med största element 1 och minsta element 0. Vidare gäller att $a \sqcup b$ och $a \sqcap b$ är supremum resp infimum av a och b med avseende på ordningen $\sqsubseteq$.

Lindenbaumalgebran

Observera att relationen $\approx$ definierad genom $\varphi \approx \psi \iff \models \varphi \longleftrightarrow \psi$ är en ekvivalensrelation på PROP. Låt $\varphi \in$PROP. Ekvivalensklassen som innehåller φ betecknas $[\varphi]$ och är alltså

$$[\varphi] = \{\psi \in \text{PROP} : \varphi \approx \psi\}.$$

Låt

$$\mathcal{P} = \{[\varphi] : \varphi \in \text{PROP}\}.$$

Vi definierar operationer $\sim$, $\sqcup$, $\sqcap$ på $\mathcal{P}$: Definiera

$$\sim [\varphi] = [\neg\varphi] \quad \text{och} \quad [\varphi] \sqcup [\psi] = [\varphi \vee \psi] \quad \text{och} \quad [\varphi] \sqcap [\psi] = [\varphi \wedge \psi].$$

I definitionen av $[\varphi] \sqcup [\psi]$ har vi valt en *representant* φ i ekvivalensklassen $[\varphi]$ och en representant ψ i ekvivalensklassen $[\psi]$, sedan bildat ekvivalensklassen som innehåller disjunktionen $\varphi \vee \psi$. Vi måste visa att resultatet inte är beroende av valen av representanter, dvs vi behöver visa att om vi väljer andra representanter $\varphi_1 \in [\varphi]$ and $\psi_1 \in [\psi]$, så blir den resulterande ekvivalensklassen

$[\varphi_1 \vee \psi_1]$ samma klass som $[\varphi \vee \psi]$.
Men anta att $\varphi \approx \varphi_1$ och $\psi \approx \psi_1$. Då följer att

$$\varphi_1 \vee \psi_1 \approx \varphi \vee \psi_1 \approx \varphi \vee \psi,$$

och alltså gäller att $[\varphi_1 \vee \psi_1] = [\varphi \vee \psi]$. Alltså är $[\varphi] \sqcup [\psi]$ väldefinierad. På liknande sätt visas att även $[\varphi] \sqcap [\psi]$ och $\sim [\varphi]$ är väldefinierade.

Sats 2: *Låt $\mathcal{P} = \{[\varphi] : \varphi \in \text{PROP}\}$ och definiera operationen $\sim [\varphi] = [\neg\varphi]$ och de binära operationerna $\sqcup$ och $\sqcap$ genom*

$$[\varphi] \sqcup [\psi] = [\varphi \vee \psi] \quad \text{och} \quad [\varphi] \sqcap [\psi] = [\varphi \wedge \psi].$$

Låt vidare $0 = [\bot]$ och $1 = [\top]$. Då är $\sim$, $\sqcup$ and $\sqcap$ väldefinierade, och $\mathcal{P}$ med $\sim$, $\sqcup$, $\sqcap$, 0 och 1 är en Boolesk algebra.

Den Booleska algebran $\mathcal{P}$ i satsen kallas för *Lindenbaumalgebran.*

Bevis: Egenskaperna (1)-(8) följer av motsvarande satslogiska tautologi.

(1) $\sqcup$ och $\sqcap$ är associativa, eftersom $\varphi \vee (\psi \vee \tau) \approx (\varphi \vee \psi) \vee \tau$ och $\varphi \wedge (\psi \wedge \tau) \approx (\varphi \wedge \psi) \wedge \tau$.

(2) Kommutativitet gäller eftersom $\varphi \vee \psi \approx \psi \vee \varphi$, och $\varphi \wedge \psi \approx \psi \wedge \varphi$.

(3) Distributivitet följer av:

$$\varphi \wedge (\psi \vee \tau) \approx (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \tau) \quad \text{och den duala} \quad \varphi \vee (\psi \wedge \tau) \approx (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \tau).$$

(4) de Morgans lagar: $\neg(\varphi \vee \psi) \approx \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

(5) $\varphi \vee \varphi \approx \varphi$ och $\varphi \wedge \varphi \approx \varphi$.

(6) $\varphi \vee \bot \approx \varphi$ och $\varphi \wedge \bot \approx \bot$.

(7) $\varphi \vee \top \approx \top$ och $\varphi \wedge \top \approx \varphi$.

(8) $\varphi \wedge \neg\varphi \approx \bot$ och $\varphi \vee \neg\varphi \approx \top$.

Vi tittar också på den partiella ordningen $\sqsubseteq$ på $\mathcal{P}$. Vi har

$$[\varphi] \sqsubseteq [\psi] \iff [\varphi] \sqcap [\psi] = [\varphi] \iff \varphi \wedge \psi \approx \varphi \iff \models \varphi \longrightarrow \psi.$$

Så

$$[\varphi] \sqsubseteq [\psi] \iff \varphi \longrightarrow \psi \text{ är en tautologi.}$$

Enligt Sats 1 har vi att $[\varphi \vee \psi]$ är supremum av $[\varphi]$ och $[\psi]$, och att $[\varphi \wedge \psi]$ är infimum av $[\varphi]$ och $[\psi]$.

Boolesk algebra av delmängder

Låt A vara en mängd, och låt

$$B = \mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\},$$

dvs B består av alla delmängder till A. (B kallas potensmängden till A och skrivs ofta $\mathcal{P}(A)$.) Repetera union, snitt och komplement:

1. Unionen av X_1 och X_2: $X_1 \cup X_2 = \{x \in A : x \in X_1 \text{ eller } x \in X_2\}$
2. Snittet av X_1 och X_2: $X_1 \cap X_2 = \{x \in A : x \in X_1 \text{ och } x \in X_2\}$
3. Komplementet till X: $X^c = A \setminus X = \{x \in A : x \notin X\}$

Sats 3: *Låt A vara en mängd och låt $B = \{X : X \subseteq A\}$ vara potensmängden till A. Då är*

$$\mathcal{B} = \langle B, \cup, \cap, {}^c, \emptyset, A \rangle$$

en Boolesk algebra.

Övningar

8. Visa sats 3, dvs kontrollera att axiomen för en Boolesk algebra är uppfyllda.
9. Tänk igenom sats 1 i fallet av den Booleska algebran av delmängder. Visa t ex att B med $\subseteq$ är en partiell ordning med största och minsta element, och att $X_1 \cup X_2$ blir supremum (och $X_1 \cap X_2$ blir infimum) av X_1 och X_2 med avseende på den partiella ordningen $\subseteq$.