UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sigstam

Prov i matematik
KandData, KandMa
LOGIK OCH BEVISTEKNIK I
2011-05-30

Skrivtid: 8.00 - 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogat formelblad för sekventkalkyl. ***Om du är godkänd på examinationsuppgifterna med LPL, så har du redan full poäng på de stjärnmärkta uppgifterna 1–5. Lämna alltså inte in uppgift 1–5 om du är godkänd på LPL.*** *För betyget 3 krävs 18 poäng (av 24) på del A. För betyget 4 (resp. 5) krävs 18 poäng på del A och 25 (resp. 32) poäng totalt. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar.*

Del A

1* Översätt följande utsagor om blommor till första ordningens logik (FOL).
Använd relationssymbolerna *Blå*, *Röd* och *VackrareÄn*.

Röda blommor är vackrare än blå blommor.
Alla blommor är antingen röda eller blå.
För varje blå blomma finns det alltså en vackrare blomma.

(5)

2* Skriv satser S_1, S_2, och S_3 som (förutom satssymboler och parenteser) endast använder konnektiverna $\longrightarrow$ och $\perp$, och så att S_1 är ekvivalent med $\neg A$, S_2 är ekvivalent med $A \vee B$, och S_3 är ekvivalent med $A \wedge B$. (3)

3* Skriv följande sats på konjunktiv normalform (KNF), och på disjunktiv normalform (DNF).

$$(A \longrightarrow \neg B) \longrightarrow (\neg C \wedge A) \qquad (2)$$

4***.** Avgör om följande slutledningar på formen $\Gamma \models \sigma$ är giltiga. För varje slutledning som inte är giltig, ange ett motexempel med hjälp av sanningsvärden. För varje giltig slutledning, konstruera att formellt bevis som vittnar om att $\Gamma \vdash \sigma$.

(a) $A \wedge B \longrightarrow C \models A \longrightarrow B \vee C$

(b) $\models A \vee \neg A$

(c) $\neg A \longrightarrow B \models A \vee B$ (5)

5* För var och en av följande påståenden i FOL på formen $\models \sigma$, avgör om det gäller. För påstående som gäller, konstruera även ett formellt bevis som vittnar om att $\vdash \sigma$. För påstående som inte gäller, förklara med ett motexempel varför det inte gäller.

(a) $\models \forall x\ (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x)) \longleftrightarrow \forall x\, \mathbf{P}(x) \wedge \forall x\, \mathbf{Q}(x)$

(b) $\models \forall x\ (\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x)) \longleftrightarrow \forall x\, \mathbf{P}(x) \vee \forall x\, \mathbf{Q}(x)$

(3)

Var god vänd! Fler uppgifter på baksidan.

6 För var och en av följande påståenden i FOL på formen $\Gamma \models \sigma$, avgör om det gäller. ($\mathbf{P}$ och $\mathbf{Q}$ är relationssymboler, och $\mathbf{c}$ och $\mathbf{d}$ är konstantsymboler.) För påstående som gäller, konstruera även ett formellt bevis som vittnar om att $\Gamma \vdash \sigma$. För påstående som inte gäller, förklara med ett motexempel varför det inte gäller.

(a) $\exists x\ (\mathbf{P}(x) \longrightarrow \mathbf{Q}(x))\,,\ \exists x\,\mathbf{P}(x) \models\ \exists x\,\mathbf{P}(x) \longrightarrow \exists x\,\mathbf{Q}(x)$

(b) $\models\ \exists x\ (\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x)) \longleftrightarrow \exists x\,\mathbf{P}(x) \vee \exists x\,\mathbf{Q}(x)$

(c) $\forall x\,(\neg\mathbf{Q}(x) \longrightarrow \neg\mathbf{P}(\mathbf{c}))\,,\ \forall x\,\mathbf{P}(x) \models\ \mathbf{Q}(\mathbf{d})$

(6)

Del B

7 Avgör för var och en mängderna Γ_1 och Γ_2 om den är (a) konsistent, (b) satisfierbar.

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{p_3 \longrightarrow p_1,\ p_0 \vee \neg p_1,\ \neg(p_3 \wedge p_0),\ p_3\,\}\\ \Gamma_2 &= \{p_0 \longrightarrow \neg p_1,\ p_1 \longleftrightarrow p_2,\ (\neg p_2 \vee p_3) \longleftrightarrow p_1\,\}\end{aligned}$$

Motivera dina svar noga! (4)

8 (a) Visa att $\vdash \exists x\,\forall y\,\mathbf{P}(x,y) \longrightarrow \forall y \exists x\,\mathbf{P}(x,y)$.

(b) Visa att $\nvdash \forall y\,\exists x\,\mathbf{P}(x,y) \longrightarrow \exists x\,\forall y\,\mathbf{P}(x,y)$.

Motivera noga! (4)

9 Betrakta satserna

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \forall x\,\neg\mathbf{P}(x,x)\\ \varphi_2 &= \forall x\,\forall y\,\forall z\ (\mathbf{P}(x,y) \wedge \mathbf{P}(y,z) \longrightarrow \mathbf{P}(x,z))\\ \varphi_3 &= \forall x\,\exists y\,\mathbf{P}(x,y)\end{aligned}$$

där $\mathbf{P}$ är en 2-ställig relationssymbol.

(a) Ange en modell för $\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3\}$.

(b) Visa att mängden $\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3\}$ är *oberoende*, dvs att ingen av satserna kan bevisas från de två övriga satserna. (Du behöver alltså visa att $\varphi_1, \varphi_2 \nvdash \varphi_3$, och $\varphi_1, \varphi_3 \nvdash \varphi_2$ och $\varphi_2, \varphi_3 \nvdash \varphi_1$.)

10. Låt $\mathcal{P}$ vara den del av PROP som fås genom att endast använda satssymbolerna p_i, $i \in \mathbf{N}$, och konnektiverna $\neg$, $\vee$ och $\wedge$. Definiera en funktion $N : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ induktivt genom följande klausuler.

BAS $N(p_i) = \neg p_i$ för varje satssymbol p_i, $i \in \mathbf{N}$.

IND $N(\neg\varphi) = \neg N(\varphi)$, $N(\varphi \vee \psi) = N(\varphi) \wedge N(\psi)$, $N(\varphi \wedge \psi) = N(\varphi) \vee N(\psi)$.

Visa med induktion över $\mathcal{P}$ att $\models N(\varphi) \longleftrightarrow \neg\varphi$. (4)

LYCKA TILL!