UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sigstam

Prov i matematik
DataKand, MaKand, Frist
LOGIK OCH BEVISTEKNIK
2011-05-30

Svar eller ledtrådar till tentan 2011-05-30.

Del A

1. Översätt följande utsagor om blommor till första ordningens logik (FOL).
Använd relationssymbolerna *Blå*, *Röd* och *VackrareÄn*.

> Röda blommor är vackrare än blå blommor.
>
> Alla blommor är antingen röda eller blå.
>
> För varje blå blomma finns det alltså en vackrare blomma.

Lösning. T ex: $\forall x \forall y \left(Blå(x) \land Röd(y) \longrightarrow VackrareÄn(y,x) \right)$,
$\forall x \left((Blå(x) \lor Röd(x)) \land \neg (Blå(x) \land Röd(x)) \right)$,
$\forall x \left(Blå(x) \longrightarrow \exists y \left(VackrareÄn(y,x) \right) \right)$. □

2. Skriv satser S_1, S_2, och S_3 som (förutom satssymboler och parenteser) endast använder konnektiverna $\longrightarrow$ och $\perp$, och så att S_1 är ekvivalent med $\neg A$, S_2 är ekvivalent med $A \lor B$, och S_3 är ekvivalent med $A \land B$.

Lösning. T ex $S_1 = A \longrightarrow \perp$, $S_2 = (A \longrightarrow \perp) \longrightarrow B$ och $S_3 = (A \longrightarrow (B \longrightarrow \perp)) \longrightarrow \perp$.
Verifiera med sanningsvärdestabell. □

3. Skriv följande sats på konjunktiv normalform (KNF), och på disjunktiv normalform (DNF).

$$(A \longrightarrow \neg B) \longrightarrow (\neg C \land A)$$

Lösning. T. ex. $(A \land B) \lor (\neg C \land A)$ på DNF, och $A \land (B \lor \neg C)$ på KNF. (Verifiera t ex med sanningsvärdestabeller.)

□

4. Avgör om följande slutledningar på formen $\Gamma \models \sigma$ är giltiga. För varje slutledning som inte är giltig, ange ett motexempel med hjälp av sanningsvärden. För varje giltig slutledning, konstruera att formellt bevis som vittnar om att $\Gamma \vdash \sigma$.

(a) $A \land B \longrightarrow C \models A \longrightarrow B \lor C$

(b) $\models A \lor \neg A$

(c) $\neg A \longrightarrow B \models A \lor B$

Lösning. (a) $A \land B \longrightarrow C \models A \longrightarrow B \lor C$.
Gäller ej. En motexempelvaluering är A sann, B och C falska.

(b) $\models A \vee \neg A$.
Gäller, eftersom sanningsvärdestabellen får 1 på varje rad. Gör ett formellt bevis. (Alt: Gör först det formella beviset, och sedan följer av sundhetssatsen att påståendet gäller.)

(c) $\neg A \longrightarrow B \models A \vee B$.
Gäller. Formellt bevis skall göras.

$\square$

5. För var och en av följande påståenden i FOL på formen $\models \sigma$, avgör om det gäller. För påstående som gäller, konstruera även ett formellt bevis som vittnar om att $\vdash \sigma$. För påstående som inte gäller, förklara med ett motexempel varför det inte gäller.

(a) $\models \forall x\ (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x)) \longleftrightarrow \forall x\, \mathbf{P}(x) \wedge \forall x\, \mathbf{Q}(x)$

(b) $\models \forall x\ (\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x)) \longleftrightarrow \forall x\, \mathbf{P}(x) \vee \forall x\, \mathbf{Q}(x)$

Lösning. (a) Gäller. Gör ett formellt bevis att $\vdash \varphi \longleftrightarrow \psi$. Dra slutsatsen att $\models \varphi \longleftrightarrow \psi$, med hjälp av sundhetssatsen. Alternativt, börja med att resonera semantiskt för att visa att $\models \varphi \longleftrightarrow \psi$. Men då måste ändå ett formellt bevis presenteras.

(b) Gäller inte. Ett exempel på en motmodell är strukturen vars universum är de naturliga talen, och där $\mathbf{P}$ tolkas som de jämna talen, och $\mathbf{Q}$ som de udda naturliga talen. I denna struktur är $\forall x\, (\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x))$ sann, men $\forall x\, \mathbf{P}(x) \vee \forall x\, \mathbf{Q}(x)$ är falsk. Alltså $\not\models \varphi \longleftrightarrow \psi$. Av sundhetssatsen följer att $\not\vdash \varphi \longleftrightarrow \psi$.

$\square$

6. För var och en av följande påståenden i FOL på formen $\Gamma \models \sigma$, avgör om det gäller. ($\mathbf{P}$ och $\mathbf{Q}$ är relationssymboler, och $\mathbf{c}$ och $\mathbf{d}$ är konstantsymboler.) För påstående som gäller, konstruera även ett formellt bevis som vittnar om att $\Gamma \vdash \sigma$. För påstående som inte gäller, förklara med ett motexempel varför det inte gäller.

(a) $\exists x\ (\mathbf{P}(x) \longrightarrow \mathbf{Q}(x)), \exists x\, \mathbf{P}(x) \models \exists x\, \mathbf{P}(x) \longrightarrow \exists x\, \mathbf{Q}(x)$

(b) $\models \exists x\ (\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x)) \longleftrightarrow \exists x\, \mathbf{P}(x) \vee \exists x\, \mathbf{Q}(x)$

(c) $\forall x\, (\neg \mathbf{Q}(x) \longrightarrow \neg \mathbf{P}(\mathbf{c})), \forall x\, \mathbf{P}(x) \models \mathbf{Q}(\mathbf{d})$

Lösning. (a) gäller inte. En motmodell: Universum $A = \{0, 1\}$, $P = \{0\}$ och $Q = \emptyset$. I denna struktur är $\exists x\ (\mathbf{P}(x) \longrightarrow \mathbf{Q}(x))$ sann (vittne är elementet 1) och $\exists x\, \mathbf{P}(x)$ är sann med vittnet 0, men $\exists x\, \mathbf{P}(x) \longrightarrow \exists x\, \mathbf{Q}(x)$ är falsk eftersom $P \neq \emptyset$ och $Q = \emptyset$.
(b) gäller. Gör ett formellt bevis, och använd sundhetssatsen. $\square$

7. Avgör för var och en mängderna Γ_1 och Γ_2 om den är (a) konsistent, (b) satisfierbar.

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{p_3 \longrightarrow p_1,\ p_0 \vee \neg p_1,\ \neg(p_3 \wedge p_0),\ p_3\,\} \\ \Gamma_2 &= \{p_0 \longrightarrow \neg p_1,\ p_1 \longleftrightarrow p_2,\ (\neg p_2 \vee p_3) \longleftrightarrow p_1\,\} \end{aligned}$$

Lösning. (a) Γ_1 är inkonsistent och ej satisfierbar. Gör ett formellt bevis att $\Gamma_1 \vdash \perp$. Då är Γ_1 inkonsistent. Av sundhetssatsen följer då att $\Gamma_1 \models \perp$, dvs den är ej satisfierbar. Alternativt: visa att det inte finns någon valuering som gör alla satser i Γ_1 sanna. Då är den alltså ej satisfierbar. Av fullständighetssatsen följer då att den ej är konsistent.

(b) Γ_2 är satisfierbar, med t ex p_0 falsk, och de övriga satssymbolerna sanna. Alltså gäller $\Gamma_2 \not\models \bot$. Sundhetssatsen ger att $\Gamma_2 \nvdash \bot$, dvs Γ_2 är konsistent.

$\square$

8. (a) Visa att $\vdash \exists x \forall y \, \mathbf{P}(x,y) \longrightarrow \forall y \exists x \, \mathbf{P}(x,y)$.

(b) Visa att $\nvdash \forall y \exists x \, \mathbf{P}(x,y) \longrightarrow \exists x \forall y \, \mathbf{P}(x,y)$.

Motivera noga!

Bevis. (a) visas enklast genom att ange ett formellt bevis.
(b) Betrakta strukturen vars universum är heltalen $\mathbf{Z}$, och som tolkar $\mathbf{P}$ som $<$. Till varje heltal y finns det något heltal x sådant att $x < y$, så $\forall y \exists x \, \mathbf{P}(x,y)$ är sann i strukturen. Men det finns inget heltal som är mindre än varje heltal, så $\exists x \forall y \, \mathbf{P}(x,y)$ är falsk i strukturen. Alltså har vi visat $\not\models \forall y \exists x \, \mathbf{P}(x,y) \longrightarrow \exists x \forall y \, \mathbf{P}(x,y)$. Av sundhetssatsen följer nu att $\nvdash \forall y \exists x \, \mathbf{P}(x,y) \longrightarrow \exists x \forall y \, \mathbf{P}(x,y)$. $\square$

9. Betrakta satserna

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \forall x \, \neg \mathbf{P}(x,x) \\ \varphi_2 &= \forall x \forall y \forall z \, (\mathbf{P}(x,y) \land \mathbf{P}(y,z) \longrightarrow \mathbf{P}(x,z)) \\ \varphi_3 &= \forall x \, \exists y \, \mathbf{P}(x,y) \end{aligned}$$

där $\mathbf{P}$ är en 2-ställig relationssymbol.

(a) Ange en modell för $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

(b) Visa att mängden $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ är *oberoende*, dvs att ingen av satserna kan bevisas från de två övriga satserna. (Du behöver alltså visa att $\varphi_1, \varphi_2 \nvdash \varphi_3$, och $\varphi_1, \varphi_3 \nvdash \varphi_2$ och $\varphi_2, \varphi_3 \nvdash \varphi_1$.)

Lösning. (a) En modell för $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ är t ex $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N}, < \rangle$, dvs de naturliga talen med $<$-relationen. Verifiera.
(b) Visa med motmodeller, att $\varphi_1, \varphi_2 \not\models \varphi_3$, och $\varphi_1, \varphi_3 \not\models \varphi_2$ och $\varphi_2, \varphi_3 \not\models \varphi_1$. Sedan följer påståendena av sundhetssatsen.
Exempel på motmodeller: $A_1 = \{1\}$. $P_1 = \{(1,1)\}$. I strukturen $\mathcal{A}_1 = \langle A_1, P_1 \rangle$ är φ_1 falsk, men φ_2 och φ_3 är sanna. Alltså $\varphi_2, \varphi_3 \not\models \varphi_1$.
Låt $A_2 = \{1,2,3\}$ och $P_2 = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$. I strukturen $\mathcal{A}_2 = \langle A_2, P_2 \rangle$ är φ_2 falsk (ty P_2 är ej transitiv), men φ_1 och φ_3 är sanna. Alltså $\varphi_1, \varphi_3 \not\models \varphi_2$.
Låt $A_3 = \{1,2\}$ och $P_3 = \{(1,2)\}$. I strukturen $\mathcal{A}_3 = \langle A_3, P_3 \rangle$ är φ_3 falsk, men φ_1 och φ_2 är sanna. Alltså $\varphi_1, \varphi_2 \not\models \varphi_3$.
Man ska förklara varför en given sats gäller respektive inte gäller i en viss struktur. Av sundhetssatsen följer nu att de tre satserna är oberoende. $\square$

10. Låt $\mathcal{P}$ vara den del av PROP som fås genom att endast använda satssymbolerna p_i, $i \in \mathbf{N}$, och konnektiverna $\neg$, $\lor$ och $\land$. Definiera en funktion $N : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ induktivt genom följande klausuler.

BAS $N(p_i) = \neg p_i$ för varje satssymbol p_i, $i \in \mathbf{N}$.

IND $N(\neg\varphi) = \neg N(\varphi)$, $N(\varphi \lor \psi) = N(\varphi) \land N(\psi)$, $N(\varphi \land \psi) = N(\varphi) \lor N(\psi)$.

Visa med induktion över $\mathcal{P}$ att $\models N(\varphi) \longleftrightarrow \neg\varphi$.

Lösning. Inför skrivsättet $A \approx B$ för $\models A \longleftrightarrow B$. Vi ska alltså visa att $N(\varphi) \approx \neg\varphi$ för alla $\varphi \in \mathcal{P}$. Induktion över $\mathcal{P}$.

BAS Om φ är en atom, så är $\varphi = p_i$ för något $i \in \mathbf{N}$. Av definitionen för N följer att $N(\varphi) = N(p_i) = \neg p_i = \neg\varphi$. Alltså följer $N(\varphi) \approx \neg\varphi$.

IND$\wedge$ Låt $\varphi = A \wedge B$, och anta induktivt att $N(A) \approx \neg A$ och $N(B) \approx \neg B$. Vi har nu

$$N(\varphi) = N(A \wedge B) = N(A) \vee N(B) \approx \neg A \vee \neg B \approx \neg(A \wedge B) = \neg\varphi.$$

IND$\vee$ visas analogt med $\wedge$-fallet.

$\square$