Inger Sigstam, vt 2011

Att leta motexempel - sekventkalkyl - fullständighet

Regler för sekventkalkylen. Se förklaringar på baksidan. $\square$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \bot, \Delta} \;\Longrightarrow \bot \qquad\qquad \frac{\times}{\Gamma, \bot \Longrightarrow \Delta} \;\bot \Longrightarrow$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \phi \qquad \Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \phi \wedge \psi} \;\Longrightarrow \wedge \qquad\qquad \frac{\phi, \psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\phi \wedge \psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \;\wedge \Longrightarrow$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \phi, \psi}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \phi \vee \psi} \;\Longrightarrow \vee \qquad\qquad \frac{\phi, \Gamma \Longrightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\phi \vee \psi, \Gamma \rightarrow \Delta} \;\vee \Longrightarrow$$

$$\frac{\phi, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \neg\phi} \;\Longrightarrow \neg \qquad\qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \phi}{\neg\phi, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \;\neg \Longrightarrow$$

$$\frac{\Gamma, \phi \;\Longrightarrow\; \Delta, \psi}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \phi \rightarrow \psi} \;\Longrightarrow\rightarrow \qquad\qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \phi, \Delta \quad \psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\phi \rightarrow \psi, \Gamma \;\Longrightarrow\; \Delta} \;\rightarrow\Longrightarrow$$

$$\frac{\phi, \Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi \qquad \psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta, \phi}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \phi \leftrightarrow \psi} \;\Longrightarrow\leftrightarrow$$

$$\frac{\phi, \psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta \qquad \Gamma \Longrightarrow \Delta, \phi, \psi}{\phi \leftrightarrow \psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \;\leftrightarrow\Longrightarrow$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \phi(\mathbf{c})}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \forall x \phi(x)} \;\Longrightarrow \forall$$

där **c** är en ny konstantsymbol

$$\frac{\phi(t), \forall x \phi(x), \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\forall x \phi(x), \Gamma \Longrightarrow \Delta} \;\forall \Longrightarrow$$

där t är en sluten term

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \exists x \phi(x), \phi(t)}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \exists x \phi(x)} \;\Longrightarrow \exists$$

där t är en sluten term

$$\frac{\phi(\mathbf{c}), \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\exists x \phi(x), \Gamma \Longrightarrow \Delta} \;\exists \Longrightarrow$$

där **c** är en ny konstantsymbol

1 Sekventkalkyl för satslogik

Låt Γ vara en mängd av satser, och σ en sats. Sekventkalkyl är användbart t ex då man vill undersöka om ett påstående av formen $\Gamma \models \sigma$ gäller eller ej. Idén är att leta efter ett motexempel, dvs försöka göra alla satser i Γ sanna, och samtidigt satsen σ falsk. Ibland kan man med hjälp av sekventkalkyl se att sådant motexempel inte finns, och får då dra slutsatsen att $\Gamma \models \sigma$. Ibland kan man med hjälp av sekventkalkyl verkligen hitta ett motexempel, och då gäller förstås $\Gamma \not\models \sigma$.

En *sekvent* är en följd av satser med en sekventpil någonstans i följden:

$$[\ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \Longrightarrow \sigma_1, \ldots, \sigma_m\ ]\ .$$

En sekvent är ett sätt att säga att man försöker göra alla satserna till vänster om $\Longrightarrow$ sanna, och alla formlerna till höger om $\Longrightarrow$ falska.

Exempel 1. Vi vill undersöka om $p \vee q \models \neg(\neg p \wedge \neg q)$.
Vi skriver därför sekventen

$$[\ p \vee q \Longrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)\ ].$$

Att göra $\neg\varphi$ falsk är ekvivalent med att göra φ sann. Därför kan vi nu skriva sekventen

$$[\ p \vee q,\ \neg p \wedge \neg q \Longrightarrow \quad].$$

Observera att det inte står någon sats till höger om $\Longrightarrow$. Att göra en sats av typen $\varphi \wedge \psi$ sann är ekvivalent med att göra både φ och ψ sanna. Därför har vi nu sekventen

$$[p \vee q,\ \neg p,\ \neg q \Longrightarrow \quad],$$

som med $\neg$-reglerna förvandlas till

$$[\ p \vee q\ \Longrightarrow p,\ q\ ].$$

Att göra en formel $\varphi \vee \psi$ sann är ekvivalent med att göra minst en av φ och ψ sann; därför får vi nu en *förgrening.* Vi har

$$[\ p\ \Longrightarrow p,\ q\ ] \text{ eller } [\ q\ \Longrightarrow p,\ q\ ]$$

Vi ser att båda är omöjliga: i det första fallet måste vi göra p både sann och falsk, och i det andra måste q vara både sann och falsk. Vi får nu dra slutsatsen att motexempel saknas. Alltså gäller $p \vee q \models \neg(\neg p \wedge \neg q)$.

Alla regler på första sidan kan förklaras med liknande resonemang. Sekventen under strecket är den man vill analysera, och resultatet av analysen är att minst en av sekventerna över strecket behöver uppfyllas.

Sekventkalkyl för satslogik använder alla regler på föregående sida *utom* de fyra sista som gäller kvantorer. Man brukar skriva sin sökning efter motexempel som ett *träd.* Underst som rot i trädet skriver man den sekvent man börjar med, sedan arbetar man sig med hjälp av reglerna uppåt. Eftersom några regler ger upphov till förgrening, så blir det en trädliknande bild. Varje sekvent motsvarar en nod i trädet. Om man betraktar en sekvent som en uppgift som skall göras, dvs uppgiften att göra alla formler till vänster sanna och alla formler till höger falska, så kommer sekventer som hamnar på samma rad i trädet att uppfattas som att man ska göra minst en av de uppgifterna som motsvaras av sekventerna.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \times & \times \\ p \Longrightarrow p,\ q & q, \Longrightarrow p,\ q \end{array} \\ \hline
p \vee q \Longrightarrow p,\ q \\ \hline
p \vee q,\ \neg p,\ \neg q \Longrightarrow \\ \hline
p \vee q,\ \neg p \wedge \neg q \Longrightarrow \\ \hline
p \vee q \Longrightarrow \neg\big(\neg p \wedge \neg q\big)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l} \vee \Longrightarrow \\ \neg \Longrightarrow \\ \wedge \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \neg \end{array}
$$

Överst i båda vägarna har vi skrivit $\times$, det betyder att det inte går att hitta motexempel längs den vägen, eftersom det finns en sats som står både till vänster och till höger i sekventen vid krysset.

Exempel 2. Avgör om $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \models p \vee q$.

Vi ställer upp sekventträdet, obs börja nerifrån och arbeta uppåt.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \times \\ p,\ \neg p \vee q \Longrightarrow p,\ q \end{array}
&
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \Longrightarrow p,\ q \\ \hline \neg p \Longrightarrow p,\ q \end{array} & \begin{array}{c} \times \\ q \Longrightarrow p,\ q \end{array}
\end{array} \\ \hline
\neg p \vee q \Longrightarrow p,\ q \\ \hline
\neg q,\ \neg p \vee q \Longrightarrow p,\ q
\end{array}
\end{array} \\ \hline
p \vee \neg q,\ \neg p \vee q \Longrightarrow p,\ q \\ \hline
p \vee \neg q,\ \neg p \vee q \Longrightarrow p \vee q, \\ \hline
(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \Longrightarrow p \vee q
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l} \vee \Longrightarrow \\ \neg \Longrightarrow \\ \vee \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \vee \\ \wedge \Longrightarrow \end{array}
$$

Den vägen i trädet som har sekventen $[\ \Longrightarrow p,\ q\ ]$ överst, visar att vi har ett motexempel: Med den sanningsvärdestilldelning som gör både p och q falska så har vi ett motexempel. Alltså gäller att $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \not\models p \vee q$.

Våra slutsatser följer pga följande egenskap hos alla sekventregler:

Egenskap: Uppgiften i sekventen under strecket kan göras om och endast om minst en av uppgifterna för sekventerna direkt ovanför strecket kan göras.

Kom ihåg att sekventer med $\times$ är uppgifter som inte kan göras. Om uppgiften längst ner i sekventträdet kan göras, så kan man med ovanstående egenskap visa att det måste finnas en väg i trädet som inte slutar med $\times$. Längs en sådan väg kan man hitta ett motexempel till påståendet $\Gamma \models \sigma$, om den understa sekventen är $\Gamma \Longrightarrow \sigma$.

Det går också att bevisa att om *alla* vägar i trädet slutar med $\times$ så saknas motexempel till den understa sekventen $\Gamma \Longrightarrow \sigma$. I detta fall kan man också visa att $\Gamma \vdash \sigma$, dvs att det finns ett formellt bevis av σ med premisser från Γ.

Fullständighetssatsen för satslogiken.
Låt Γ vara en mängd satser och σ en sats. Då gäller:

$$\Gamma \models \sigma \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \sigma.$$

Anm. Beviset för denna sats ingår inte i vår kurs. Vi gör endast en kort skiss, där vi hoppar över alla detaljer.

($\Longrightarrow$): Anta att $\Gamma \models \sigma$, dvs att σ är sann i varje sanningsvärdestilldelning som gör alla satser i Γ sanna. Det innebär att det inte finns någon sanningsvärdestilldelning som gör satserna i Γ sanna och σ falsk. Det betyder att uppgiften i sekventen $\Gamma \Longrightarrow \sigma$ inte kan göras. Om man ställer upp sekventträdet med denna sekvent underst, så blir alltså alla vägar avslutade med ett $\times$. Man kan då bevisa att det finns ett formellt bevis av σ med premisser i Γ, dvs man har att $\Gamma \vdash \sigma$.

($\Longleftarrow$): Denna riktning kallas för *sundhetssatsen*, och förklaras noga i boken. Den använder inte sekventkalkylen.

2 Sekventkalkyl för predikatlogik

Sekventkalkyl används på samma sätt i predikatlogik, för att leta efter ett motexempel. Och även har kan sekventkalkyl användas för att få ett bevis av fullständighetssatsen.

Vi fortsätter med att anta att formlerna i våra sekventer är *slutna*, dvs de har inga fria variabelförekomster.

Vi behöver förklara hur reglerna ska användas. Med en *ny* konstantsymbol menar vi en konstantsymbol som inte redan fanns i sekventen, dvs vi utvidgar språket.

1. Gör en lista av alla slutna termer som förekommer i sekventen, eller som kan bildas med symboler som förekommer i sekventen. Låt de som förekommer i sekventen stå först, skriv därefter ett streck |, och fortsätt med sådana slutna termer som inte förekommer, men som kan bildas av symbolerna i sekventen.

2a. Ta en *ny* konstantsymbol, $\mathbf{c_1}$, och gör en lista av alla slutna termer som kan bildas med denna och symboler som finns i sekventen och som inte finns i förra listan. Sätt streck | före den första termen. (Utom om listan i 1. saknar termer före strecket, då ska du sätta strecket mellan den första och den andra termen i stället.)

2b. Ta en ny konstantsymbol, $\mathbf{c_2}$, och gör en lista av alla slutna termer som kan bildas med denna och symboler som finns i sekventen och som inte finns i någon av de föregående listorna. Sätt streck | före den första termen.

2c. Ta en ny konstantsymbol, $\mathbf{c_3}$, och gör en lista av alla slutna termer som kan bildas med denna och symboler som finns i sekventen och som inte finns i någon av de föregående listorna. Sätt streck | före den första termen.

$\vdots$

Ex. 1. Om sekventen innehåller två konstantsymboler **a** och **b**, och en ett-ställig funktionssymbol **f**, och termerna som förekommer i sekventen är **a**, **b**, **f**(**b**), så får vi följande listor:

$$
\begin{array}{rl}
1. & \mathbf{a},\, \mathbf{b},\, \mathbf{f}(\mathbf{b}) \,|\, \mathbf{f}(\mathbf{a}),\, \mathbf{f}\left(\mathbf{f}(\mathbf{a})\right),\, \mathbf{f}\left(\mathbf{f}(\mathbf{b})\right),\, \ldots \\
2a. & |\mathbf{c_1},\, \mathbf{f}(\mathbf{c_1}),\, \mathbf{f}\left(\mathbf{f}(\mathbf{c_1})\right),\, \ldots \\
2b. & |\mathbf{c_2},\, \mathbf{f}(\mathbf{c_2}),\, \mathbf{f}\left(\mathbf{f}(\mathbf{c_2})\right),\, \ldots \\
2c. & |\mathbf{c_3},\, \mathbf{f}(\mathbf{c_3}),\, \mathbf{f}\left(\mathbf{f}(\mathbf{c_3})\right),\, \ldots \\
\vdots &
\end{array}
$$

Ex. 2. Om sekventen inte innehåller någon konstantsymbol, men den innehåller funktionssymbolen $\mathbf{f}$, så får vi i stället följande listor:

$$\begin{array}{rl} 1. & | \\ 2a. & \mathbf{c_1}\,|\,\mathbf{f}(\mathbf{c_1}),\ \mathbf{f}\left(\mathbf{f}(\mathbf{c_1})\right),\ \ldots \\ 2b. & |\mathbf{c_2},\ \mathbf{f}(\mathbf{c_2}),\ \mathbf{f}\left(\mathbf{f}(\mathbf{c_2})\right),\ \ldots \\ 2c. & |\mathbf{c_3},\ \mathbf{f}(\mathbf{c_3}),\ \mathbf{f}\left(\mathbf{f}(\mathbf{c_3})\right),\ \ldots \\ \vdots & \end{array}$$

Ex. 3. Om sekventen inte innehåller någon funktionssymbol, men den innehåller konstantsymbolerna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$, så kommer listan 1 endast att innehålla dessa, och listorna 2a, 2b osv har endast en term var. Då blir det mer praktiskt att skriva ihop dem som en enda lista:

$$\mathbf{a},\ \mathbf{b}\,|\,\mathbf{c_1},\ \mathbf{c_2},\ \mathbf{c_3},\ \ldots .$$

En term som i någon lista står till vänster om strecket kallas för en *aktiverad term.* Observera att det alltid finns minst en aktiverad term när man börjar. När man gör sekventträdet kommer strecket i några av listorna eventuellt att förflyttas till höger. Alltså kommer det alltid under konstruktionen att finnas minst en aktiverad term.

Nu beskriver vi hur reglerna för kvantorerna skall användas.

$\Longrightarrow \forall$ Om man analyserar en sluten $\forall$-formel $\forall x\,\varphi(x)$ till höger, så försöker man ju att göra denna formel falsk. Då behöver man alltså ha en term i sitt universum (i den tänkta strukturen som vi letar efter) för vilken formeln φ är falsk. Vi gör detta genom att använda en ny konstantsymbol $\mathbf{c}$, och kräva att $\varphi(\mathbf{c})$ är falsk.
Aktivera en ny konstant genom att påbörja en ny lista, samt aktivera den första termen $\mathbf{c_i}$ i den listan, och skriv $\varphi(\mathbf{c_i})$ till höger om sekventpilen.

$\exists \Longrightarrow$ En existensformel $\exists x\,\varphi(x)$ till vänster är en existensformel som vi vill göra sann. Aktivera en ny konstant genom att påbörja en ny lista, samt aktivera den första termen $\mathbf{c_i}$ i den listan, och skriv $\varphi(\mathbf{c_i})$ till vänster om sekventpilen.

$\forall \Longrightarrow$ Vi vill göra allformeln $\forall x\,\varphi(x)$ sann. I den struktur som vi håller på att bygga så vill vi alltså att $\varphi(\overline{a})$ är sann för alla element $a \in A$. Detta gör vi på följande sätt: *Behåll* allformeln på vänster sida, och skriv även dit $\varphi(t)$ för alla hittills aktiverade termer, på den vänstra sidan.

$\Longrightarrow \exists$ Vi vill göra existensformeln $\exists x\,\varphi(x)$ falsk. I den struktur som vi håller på att bygga så vill vi alltså att $\varphi(\overline{a})$ är falsk för alla element $a \in A$. Detta gör vi på följande sätt: *Behåll* existensformeln på höger sida, och skriv även dit $\varphi(t)$ för alla hittills aktiverade termer, på den högra sidan.

Själva sekventträdskonstruktionen går nu till i *rundor*. En runda är att man gör en sak med varje formel i sekventen. Sedan påbörjar man en ny runda med att flytta strecket | ett steg till höger *i varje påbörjad lista.* Det är alltså när man börjar en ny runda som man kan få tag i termer som står längre till höger i listorna.

Den viktiga egenskapen på föregående sida gäller även för de regler som innehåller kvantorer. Kom ihåg att en sekvent kan betraktas som en uppgift som skall göras: uppgiften är att göra alla satser till vänster sanna, och alla satser till höger falska.

2.1 Egenskap för sekventreglerna. *För varje regel i sekventkalkylen gäller att sekventen under strecket kan göras om och endast om minst en av sekventerna över strecket kan göras.* $\square$

Av denna egenskap följer följande viktiga egenskaper. Om man i en sekvent finner en sats $\mathbf{A}$ både till vänster och till höger om sekventpilen, så innebär det ju att man måste göra $\mathbf{A}$ både sann och falsk. Man har alltså en omöjlig uppgift och bokför det genom att sätta $\times$ över sekventen.

2.2 Lemma. *Betrakta ett sekventträd vars understa sekvent är $\Gamma \Longrightarrow \sigma$.*

(i) Om alla vägar har avslutats med $\times$, så saknas motexempel till $\Gamma \models \sigma$.

(ii) Om det finns någon väg i trädet som är avslutad men inte har $\times$, så kan man längs den vägen avläsa *ett motexempel till $\Gamma \models \sigma$, dvs man kan hitta en modell för Γ i vilken σ är falsk.*

(iii) Om det finns någon väg i trädet som är oändlig, så kan man längs den vägen avläsa *ett motexempel till $\Gamma \models \sigma$, dvs man kan hitta en modell för Γ i vilken σ är falsk.*

$\square$

Bevis (i) följer direkt av egenskapen i Lemma 2.2. Vi kommer i följande exempel att visa hur man kan avläsa ett motexempel i situationerna (ii) och (iii). I (ii) ska man använda de aktiverade termerna längs vägen som sitt universum. Sedan definierar man relationer och funktioner enligt vad som står till vänster i den översta sekventen. I (iii) ska man använda hela $\mathbf{N}$ som universum, och definiera relationer enligt vad som står till vänster i någon sekvent längs vägen. $\square$

Exempel. Avgör om $\models \exists x\big(P(a) \to Q(x)\big) \to \big(P(a) \to \forall x Q(x)\big)$.
Lösning. Vi konstruerar ett sekventträd med den nedersta sekventen $\Longrightarrow \exists x\big(\mathbf{P}(\mathbf{a}) \to \mathbf{Q}(x)\big) \to \big(\mathbf{P}(\mathbf{a}) \to \forall x \mathbf{Q}(x)\big)$. Eftersom det endast finns en konstantsymbol a och det inte finns någon funktionssymbol, så kan vi skriva listan

$$\mathbf{a} \,|\, \mathbf{c_1},\, \mathbf{c_2},\, \mathbf{c_3},\, \ldots,$$

där alltså a är aktiverad. Ett träd konstrueras sedan nerifrån och upp. Vid tillämpningen av regeln $\exists \Longrightarrow$ så aktiveras en ny konstantsymbol, och listan förändras till

$$\mathbf{a},\, \mathbf{c_1} \,|\, \mathbf{c_2},\, \mathbf{c_3},\, \ldots .$$

Några steg senare när regeln $\Longrightarrow \forall$ används, så aktiveras även c_2, och när vi avslutar trädet har listan utseendet

$$\mathbf{a},\, \mathbf{c_1},\, \mathbf{c_2} \,|\, \mathbf{c_3},\, \mathbf{c_4},\, \ldots .$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\mathbf{P}(\mathbf{a}) \Longrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{a}), \forall x \mathbf{Q}(x)} \qquad \dfrac{\mathbf{Q}(\mathbf{c_1}), \mathbf{P}(\mathbf{a}) \Longrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{c_2})}{\mathbf{Q}(\mathbf{c_1}),\, \mathbf{P}(\mathbf{a}) \Longrightarrow \forall x \mathbf{Q}(x)}\ {\Longrightarrow \forall}}{\mathbf{P}(\mathbf{a}) \to \mathbf{Q}(\mathbf{c_1}), \mathbf{P}(\mathbf{a}) \ \Longrightarrow\ \forall x\, \mathbf{Q}(x)}\ {\to\Longrightarrow}}{\exists x\big(\mathbf{P}(\mathbf{a}) \to \mathbf{Q}(x)\big),\, \mathbf{P}(\mathbf{a}) \ \Longrightarrow\ \forall x\, \mathbf{Q}(x)}\ {\exists \Longrightarrow}}{\exists x\ (\mathbf{P}(\mathbf{c}) \to \mathbf{Q}(x)) \ \Longrightarrow\ \mathbf{P}(\mathbf{c}) \to \forall x\, \mathbf{Q}(x)}\ {\Longrightarrow\to}}{\Longrightarrow \exists x\, (\mathbf{P}(\mathbf{a}) \to \mathbf{Q}(x)) \to (\mathbf{P}(\mathbf{a}) \to \forall x\, \mathbf{Q}(x))}\ {\Longrightarrow\to}$$

Trädet har en gren som inte slutar med $\times$, men som ändå är avslutad eftersom ingen mer regel går att tillämpa. I den översta sekventen i den grenen kan vi *avläsa ett motexempel*: Vi behöver bara ange en struktur i vilken $\mathbf{Q}(c_1)$ och $\mathbf{P}(a)$ är sanna och $\mathbf{Q}(c_2)$ är falsk. Vi vet att det räcker eftersom alla regler har Egenskapen, på sid 4. Vi tillverkar en sådan struktur på följande sätt. Låt universum vara mängden $A = \{0, 1, 2\}$. Tolka konstantsymbolerna genom

$$a^{\mathcal{A}} = 0,\ (c_1)^{\mathcal{A}} = 1,\ (c_2)^{\mathcal{A}} = 2,$$

och tolka relationssymbolen $\mathbf{P}$ som relationen (mängden) $P = \{0\}$, och relationssymbolen $\mathbf{Q}$ som relationen (mängden) $Q = \{1\}$. Denna struktur $\mathcal{A} = \langle A, P, Q, 0, 1, 2 \rangle$ är ett motexempel till den understa sekventen. $\mathcal{A} \models \exists x\,(P(a) \to Q(x))$ eftersom $1 \in Q$ så därför är $P(a) \to Q(c_1)$ sann i $\mathcal{A}$. Men eftersom $0 \in P$ och satsen $\forall x\, Q(x)$ är falsk i $\mathcal{A}$, så är $\mathcal{A} \not\models P(a) \to \forall x\, Q(x)$. Alltså har vi hittat ett motexempel, och vi kan svara att $\not\models \exists x\big(P(a) \to Q(x)\big) \to \big(P(a) \to \forall x Q(x)\big)$.

Observera att vi avläste motexemplet med hjälp av den översta sekventen i en gren som inte hade $\times$. Som universum väljer man några naturliga tal, ett för varje aktiverad term längs grenen. Därefter definierar man relationerna enligt de atomära formler som står till vänster i den översta sekventen.

Sekventkalkyl kan användas för att bevisa fullständighetssatsen. Vi kommer inte att bevisa den i sin helhet, endast skissa huvuddragen i beviset.

2.3 *Lemma. Samband mellan sekventkalkyl och formella bevis.* *Anta att sekventträdet som har den understa sekventen $\Gamma \Longrightarrow \sigma$ har $\times$ på alla vägar. För varje sekvent $\mathbf{A_1}, \dots \mathbf{A_n} \Longrightarrow \mathbf{B_1}, \dots, \mathbf{B_m}$ i trädet gäller det att $\mathbf{A_1}, \dots \mathbf{A_n} \vdash \mathbf{B_1} \vee \dots \vee \mathbf{B_m}$.*

Bevis Beviset görs med induktion på sekventträdet. För de översta sekventerna följer påståendet enkelt med $\vee$-intro, eftersom de har $\times$. I induktionssteget måste man visa för varje sekventregel, att om sekventerna över strecket uppfyller lemmat, så gör även den undre det. $\square$

2.4 *Fullständighetssatsen för predikatlogiken.* *Låt Γ en uppräknelig mängd av satser i ett FOL $\mathcal{L}$, och låt σ vara en sats i $\mathcal{L}$. Då gäller*

$$\Gamma \models \sigma \Longrightarrow \Gamma \vdash \sigma.$$

Bevis Anta att $\Gamma \models \sigma$. Det betyder ju att varje modell för Γ också är en modell för σ. Alltså saknas motexempel till $\Gamma \models \sigma$. Det följer av Lemma 2.2 att sekventträdet med understa sekvent $\Gamma \Longrightarrow \sigma$ har $\times$ på alla vägar. Annars skulle vi ha ett motexempel. Tillämpa nu Lemma 2.3 för den understa sekventen och vi har visat att $\Gamma \vdash \sigma$. $\square$

Referenser

1. Kleene, S. C. *Mathematical Logic*, Wiley, New York, 1967. Kapitel VI.

2. Sigstam, I. *Fullständighetssatsen för predikatlogiken via sekventkalkyl*, 2007. (Kompendium som detta är en kortversion av.)