UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam

Övning 4
LOGIK OCH BEVISTEKNIK I

Övningar i första ordningens predikatlogik

1. För följande påståenden på formen $\Gamma \models \sigma$, avgör om de gäller eller ej. För påstående som gäller, konstruera ett formellt bevis som vittnar att $\Gamma \vdash \sigma$. För påstående som inte gäller, ange en motmodell, dvs ange en modell för Γ i vilken σ är falsk.

   (a) $\models \forall x\, (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x)) \longleftrightarrow \forall x\, \mathbf{P}(x) \wedge \forall x\, \mathbf{Q}(x)$

   (b) $\models \exists x\, (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x)) \longleftrightarrow \exists x\, \mathbf{P}(x) \wedge \exists x\, \mathbf{Q}(x)$

   (c) $\forall x\ (\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x))\,,\ \exists x\, \neg\mathbf{P}(x) \models \exists x\, \neg\mathbf{Q}(x)$

   (d) $\forall x\ (\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x))\,,\ \exists x\, \neg\mathbf{P}(x) \models \exists x\, \mathbf{Q}(x)$

   (e) $\forall x\ (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x))\,,\ \exists x\, \neg\mathbf{P}(x) \models \exists x\, \neg\mathbf{Q}(x)$

   (f) $\models \forall x\ (\mathbf{P}(x) \vee \neg\mathbf{P}(x))$

   (g) $\mathbf{P}(\mathbf{c}) \models \forall x\, \mathbf{P}(x)$

   (h) $\mathbf{P}(\mathbf{c}) \models \exists x\, \mathbf{P}(\mathbf{f}(x))$

   I uppgift 2 och 3 visas hur man kan härleda bevisregler för $\exists$ om man har reglerna för $\forall$ och använder $\exists x\, \varphi(x)$ som en *förkortning* av formeln $\neg\forall x\, \neg\varphi(x)$. De härledda bevisen kan betraktas som förkortningar av de längre bevisen. I uppgift 2 och 3 ska du därför *inte* använda reglerna för $\exists$.

2. Konstruera ett formellt bevis för $\mathbf{P}(\mathbf{c}) \vdash \neg\forall x\, \neg\mathbf{P}(x)$, där $\mathbf{c}$ är en sluten term.

3. Anta att $\mathcal{D}$ är ett formellt bevis som vittnar att $\mathbf{P}(\mathbf{c}) \vdash \mathbf{A}$, där $\mathbf{c}$ är en ny (godtycklig) konstantsymbol som inte förekommer i den slutna formeln $\mathbf{A}$. Konstruera ett formellt bevis (som har $\mathcal{D}$ som ett delbevis) som vittnar att $\neg\forall x\, \neg\mathbf{P}(x) \vdash \mathbf{A}$.

4. Konstruera formellt bevis för $\forall x\ \mathbf{P}(x) \vee \forall x\, \mathbf{Q}(x) \vdash \forall x\ (\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x))$.

5. Låt $\mathbf{Q}$ vara en sluten formel som inte innehåller x. Konstruera ett formellt bevis för $\forall x\ (\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}) \vdash \forall x\, \mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}$.

6. Låt σ vara en sats (sluten formel) i ett FOL-språk $\mathcal{L}$, och låt $\mathcal{A}$ vara en $\mathcal{L}$-struktur.

   (a) Då gäller ju $\mathcal{A} \models \sigma$ eller $\mathcal{A} \models \neg\sigma$. Varför?

(b) För formler $\varphi(x)$ som innehåller en fri variabel x så är ju formeln $\forall x\,\varphi(x)$ sluten, och man *definierar*

$$\mathcal{A} \models \varphi(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \forall x\,\varphi(x).$$

(På liknande sätt om det finns mer än en fri variabel.)
Gäller det fortfarande att $\mathcal{A} \models \varphi(x)$ eller $\mathcal{A} \models \neg\varphi(x)$?

(c) Ge exempel på en sats σ så att $\not\models \sigma$ och $\not\models \neg\sigma$.

(d) Låt σ vara en sats som inte är formellt bevisbar, dvs $\nvdash \sigma$. Kan man vara säker på att $\vdash \neg\sigma$? Förklara!

7. Betrakta språket $\mathcal{L}$ som endast har en två-ställig relationssymbol $\mathbf{P}$ (och likhetstecknet $\doteq$). Betrakta de tre strukturerna $\mathcal{A}_1 = \langle \mathbf{N}, < \rangle$, $\mathcal{A}_2 = \langle \mathbf{Z}, \leq \rangle$, och $\mathcal{A}_3 = \langle \mathbf{Q}, \leq \rangle$.

   (a) Ange en sats σ i språket $\mathcal{L}$ så att $\mathcal{A}_1 \models \sigma$ och $\mathcal{A}_2 \models \neg\sigma$.

   (b) Ange en sats τ i språket $\mathcal{L}$ så att $\mathcal{A}_2 \models \tau$ och $\mathcal{A}_3 \models \neg\tau$.

8. Låt $\mathcal{L}$ vara som i föregående uppgift. För att underlätta läsningen skriver vi i fortsättningen $x \leq y$ i stället för $\mathbf{P}(x,y)$. En $\mathcal{L}$-struktur $\mathcal{A} = \langle A, \leq \rangle$ kallas en *partiell ordning* om

$$\mathcal{A} \qquad \models \forall x \forall y \forall z\ (x \leq y \land y \leq z \longrightarrow x \leq z)$$

och

$$\mathcal{A} \qquad \models \forall x \forall y\ (x \leq y \land y \leq x \longrightarrow x \doteq y)\,.$$

   (a) Låt $\sigma = \exists x\,\forall y\ (x \leq y \lor y \leq x)$.
   Ange partiella ordningar $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ så att $\mathcal{A} \models \sigma$ och $\mathcal{B} \models \neg\sigma$.

   (b) Låt $\sigma = \forall x \forall y \exists z((x \leq z \land y \leq z) \lor (z \leq x \land z \leq y))$, och ange partiella ordningar $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ så att $\mathcal{A} \models \sigma$ och $\mathcal{B} \models \neg\sigma$.

9. Betrakta språket för identitet, dvs språket som endast har likhetstecken $\doteq$.

   (a) Skriv satser i detta språk som tolkas som:

      (i) Det finns exakt 3 element.

      (ii) Det finns minst 2 element x har egenskapen $\varphi(x)$.

      (iii) Det finns exakt ett element som har egenskapen $\varphi(x)$.

   (b) Ange en mängd Γ av satser i detta språk sådan att

$$\mathcal{A} \models \Gamma \Longleftrightarrow \mathcal{A} \text{ är oändlig}$$

   gäller för varje struktur $\mathcal{A}$.
   Anm 1: En struktur kallas oändlig om dess universum är en oändlig mängd.
   Anm 2: Mängden Γ får vara oändlig.