FÖRELÄSNING 1
ANALYS MN1 DISTANS HT06

JONAS ELIASSON

Detta är föreläsningsanteckningar för distanskursen Matematik A - analysdelen vid Uppsala universitet höstterminen 2006

1. Förberedande material

Här har jag samlat några användbara saker som (möjligen?) är kända sedan tidigare.

1.1. Intervall. Detta är en kurs i endimensionell analys, alltså kommer alla våra funktioner vara funktioner på den reella tallinjen $\mathbb{R}$. På $\mathbb{R}$ kommer vi att huvudsakligen prata om två typer av intervall:

(1) *öppna* intervall, skrivs (a, b) eller $]a, b[$, som är mängden $\{x \mid a < x < b\}$ och
(2) *slutna* intervall, skrivs $[a, b]$, som är mängden $\{x \mid a \leq x \leq b\}$

1.2. Absolutbelopp. Absolutbeloppet $|x|$ av ett reellt tal x är definierat som

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Vi stöter ofta på uttryck av typen $|a - b|$ som vi tänker på som *avståndet* mellan punkterna a och b. Av räknelagarna för absolutbelopp är triangelolikheten

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|$$

den mest intressanta.

I flera fall kommer vi att prata om en *omgivning* av en punkt a. Med detta menar vi alla punkter $x \in \mathbb{R}$ som ligger inom avståndet r (för något $r > 0$) från a (men inte a själv), det vill säga alla x så att $0 < |x - a| < r$.

1.3. Symmetrier. När man ritar grafer för funktioner kan det vara användbart att titta efter *symmetrier* hos funktionen.

Definition 1. En funktion f är *jämn* om, för varje x, $f(-x) = f(x)$. En funktion f är *udda* om, för varje x, $f(-x) = -f(x)$.

En jämn funktion kan fås genom att spegla funktionens graf för $x > 0$ i y-axeln. För en udda funktion får man först spegla i x-axeln, sen i y-axeln.

1.4. **Logaritmer och exponentialfunktioner.** I kursen kommer vi ofta att stöta på logaritmer och exponentialfunktioner. Exponentialfunktioner är av typen $f(x) = a^x$ och logaritmen är den inversa funktionen $\log_a$. Vi har alltså

$$a^{\log_a x} = x \text{ och } \log_a a^x = x.$$

Oftast arbetar vi med en *naturliga* logaritmen e. $f(x) = e^x$ och $\log_e = \ln$.

Räkneregler för exponentialfunktioner: låt $a, b > 0$ och $x, y \in \mathbb{R}$. Då

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{x+y} &= a^x a^y \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \\ (a^x)^y &= a^{xy} \\ (ab)^x &= a^x b^x \end{aligned}$$

Räkneregler för logaritmer: låt $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ och $x, y \in \mathbb{R}$. Då

$$\begin{aligned} \log_a 1 &= 0 \\ \log_a xy &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a \frac{1}{x} &= -\log_a x \\ \log_a x^y &= y \log_a x \\ \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a} \end{aligned}$$

2. Gränsvärden

Ett av de centrala verktyg vi använder i denna kurs är gränsvärden.

2.1. Definition av gränsvärde.

Definition 2. Antag att en funktion f är definierad i en omgivning av punkten $a \in \mathbb{R}$. Då har funktionen f *gränsvärdet* L då x går mot a om för varje givet (litet) $\epsilon > 0$ vi kan hitta ett $\delta > 0$ så att om $0 < |x - a| < \delta$ så är $|f(x) - L| < \epsilon$.
Vi skriver

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Vi har också ensidiga gränsvärden: f har *högergränsvärdet* L om för varje givet $\epsilon > 0$ vi kan hitta ett $\delta > 0$ så att

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Vi skriver $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$. På motsvarande sätt kan vi definiera *vänstergränsvärdet* som skrivs $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Om f har ett gränsvärde i a så har f både höger- och vänster-gränsvärde i a och dessa är lika med gränsvärdet, det vill säga

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x),$$

när alla tre gränsvärdena finns.

Intuitionen angående gränsvärden kan sammanfattas i följande: om x är väldigt nära punkten a då kommer $f(x)$ att vara väldigt nära värdet L.

2.2. **Räkneregler för gränsvärden.**

Sats 1. Antag att $\lim_{x\to a} f(x) = L$ och $\lim_{x\to a} g(x) = M$ och låt $c \in \mathbb{R}$ vara en konstant.
Då gäller att:

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = L + M$$

$$\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = L - M$$

$$\lim_{x\to a} cf(x) = cL$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$$

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L/M,\ M \neq 0$$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{m/n} = L^{m/n},\ n \neq 0$$

I det sista fallet krävs att $L > 0$ om n är jämnt, och att $L \neq 0$ om $m < 0$.

2.3. **Satser om gränsvärden.** Satsen nedan kallas Instängningssatsen.

Sats 2. Antag att $g(x) < f(x) < h(x)$ i en omgivning av a (x s.a. $0 < |x - a| < r$), samt att

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L.$$

Då är även

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

Vi kan beräkna gränsvärden av sammansatta funktioner.

Sats 3. Antag att $g(x)$ är definierad i en omgivning av a och att $\lim_{x\to a} g(x) = A$. Antag också att $f(y)$ är definierad i en omgivning av A (d.v.s. i $0 < |y - A| < r$) och att $\lim_{y\to A} f(y) = B$. Då gäller att

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = B.$$

2.4. **Oändliga gränsvärden.** De gränsvärden vi definierat hittills är med nödvändighet ändliga. Gränsvärdet är det ändliga talet L som vi får när x går mot en ändlig punkt a. Det finns alltså två möjligheter att prata om oändliga gränsvärden: när värdet nära punkten a är oändligt eller när x går mot oändligheten.

Definition 3. Funktionen $f(x)$ har det (oegentliga) gränsvärdet $+\infty$ då $x \to a$ om det för varje tal $K > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ så att

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K.$$

Definition 4. Funktionen $f(x)$ har det (oegentliga) gränsvärdet $-\infty$ då $x \to a$ om det för varje tal $K < 0$ finns ett tal $\delta > 0$ så att

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < K.$$

Motsvarande för höger- och vänstergränsvärden. Om $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ eller $= -\infty$ (från höger eller vänster) så kallas $x = a$ för en *lodrät asymptot* till f.

Definition 5. Antag att f är definierad för $x > a$. Då har f gränsvärdet L när $x \to \infty$ (när x går mot oändligheten) om det för varje positivt tal ϵ finns ett tal M så att om $x > M$ så är $|f(x) - L| < \epsilon$.
Vi skriver

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

Motsvarande gäller då $x \to -\infty$. Om f har gränsvärdet L när $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$ så kallas linjen $y = L$ för en *vågrät asymptot* till f.

2.5. **Standardgränsvärden.** Här kommer några vanliga gränsvärden:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0, \text{ för alla } p.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0, \text{ för alla } p.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \text{ för alla } a.$$

3. Kontinuerliga funktioner

3.1. **Definition av kontinuerlig funktion.** I vår definition av gränsvärde för en funktion f i en punkt a antog vi inte att f är definierad i a. Men om f är det (vilket alltså inte är nödvändigt för gränsvärdet) kan det vara intressant att jämföra gränsvärdet L och $f(a)$. Vi vet att om x är nära a så är $f(x)$ nära L. Är $f(a)$ också nära? Svaret är: ibland.

Definition 6. En funktion f är *kontinuerlig* för $x = a$ om f är definierad i a och

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

f är *kontinuerlig till höger* för $x = a$ om

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Motsvarande för kontinuitet till vänster.

Funktionen f är kontinuerlig i ett intervall I om den är definierad för alla punkter i I och

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \text{ för alla } a \in I.$$

3.2. **Satser om kontinuerliga funktioner.** De kontinuerliga funktionerna är slutna under många olika operationer.

Sats 4. Antag att f och g är kontinuerliga för $x = a$. Då är även funktionerna $f + g$, $f - g$, cf (c konstant), fg, f/g (om $g(a) \neq 0$) och $f \circ g$ (sammansättningen av f och g) kontinuerliga för $x = a$.

Det finns många exempel på kontinuerliga funktioner: alla polynom, sin, cos, exponentialfunktioner, logaritmer för $x > 0$. Med hjälp av satsen ovan kan vi hitta ännu fler.

Nedan följer två centrala satser om kontinuerliga funktioner. Den första kallas Max-Min satsen.

Sats 5. Antag att funktionen f är definierad på ett intervall I som är slutet och begränsat (ett sådant intervall kallas *kompakt*). Antag också att f är kontinuerlig på I. Då gäller

(1) f är begränsad på I, d.v.s. det finns tal m och M så att $m \leq f(x) \leq M$ för alla $x \in I$.
(2) f antar sitt största respektive minsta värde på I, d.v.s. det finns punkter x_1 och x_2 i I så att

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \text{ för alla } x \in I.$$

Nästa sats kallas Satsen om mellanliggande värde.

Sats 6. Antag att f är kontinuerlig på I, där I är ett slutet och begränsat intervall med ändpunkterna a och b. Om s är ett tal mellan $f(a)$ och $f(b)$, så finns minst ett $x \in I$ så att $f(x) = s$.