FÖRELÄSNING 2
ANALYS MN1 DISTANS HT06

JONAS ELIASSON

Detta är föreläsningsanteckningar för distanskursen Matematik A - analysdelen vid Uppsala universitet höstterminen 2006.

1. Derivata

I grundläggande analys pratar man i första hand om två begrepp: derivata och integral. Nu har vi kommit fram till det första av dem.

1.1. Definition av derivata.

Definition 1. *Derivatan* av en funktion f är en funktion f' definierad av

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

för alla x där gränsvärdet finns. Om $f'(x)$ finns för något x säger vi att f är *deriverbar* i x.

Alternativt kan derivatan uttryckas som

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

Om f inte är deriverbar i x (det vill säga om gränsvärdet ovan inte finns) säger vi att x är en *singulär* punkt.

Definition 2. Funktionen f är *deriverbar* i intervallet I om $f'(x)$ existerar för varje $x \in I$.

Geometriskt kan man tolka derivatan som lutningskoefficienten för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten x_0. Mer exakt: tangent till $y = f(x)$ i x_0 har ekvationen

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Fysikaliskt tolkar man derivatan som ett mått på förändringshastigheten hos storheten $f(x)$.

Det finns många olika sätt att beteckna derivatan av en funktion:

$$f'(x) = Df(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx} = y' = D_x y.$$

1.2. **Derivatan av några enkla funktioner.** Här följer derivatan av några enkla funktioner.

$$f(x) = c \text{ (konstant)} \quad f'(x) = 0$$

$$f(x) = x \quad f'(x) = 1$$

$$f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ (x \neq 0)$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ (x > 0)$$

$$f(x) = x^r \quad f'(x) = rx^{r-1} \ (x^{r-1} \text{ reellt tal})$$

$$f(x) = |x| \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

1.3. **Deriverbara funktioner är kontinuerliga.**

Sats 1. Om funktionen f är deriverbar i punkten x_0 så är f kontinuerlig i x_0.

Bevis. Eftersom f är deriverbar i x_0 så finns gränsvärdet

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Vi skriver om

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x) - f(x_0) + f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \\ &= f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \end{aligned}$$

Nu kan vi beräkna gränsvärdet för f när x går mot x_0:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \\ &= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} f'(x_0)(x - x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0). \end{aligned}$$

Alltså är f kontinuerlig i x_0.

□

1.4. **Räkneregler för derivator.** Om f och g är deriverbara i x och c är en konstant då är $f+g$, $f-g$ och cf deriverbara i x och

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= f'(x)+g'(x),\\ (f-g)'(x) &= f'(x)-g'(x),\\ (cf)'(x) &= c(f'(x)).\end{aligned}$$

fg är också deriverbar i x med

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Om $f(x) \neq 0$ så är $1/f$ deriverbar i x och

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Om $g(x) \neq 0$ så är f/g deriverbar i x och

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Bevisen för dessa regler följer av motsvarande regler för gränsvärden.

1.5. **Kedjeregeln.** Om funktionen f är deriverbar i punkten u, $u = g(x)$ och g är deriverbar i x så är den sammansatta funktionen $f \circ g$ deriverbar i x och

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Detta kallas för *kedjeregeln.* Termen $g'(x)$ i uttrycket kallas den *inre* derivatan.

Vi har redan sett ett exempel av kedjeregeln, nämligen fallet $1/f$ bland räknereglerna för derivator. $1/f$ är sammansättningen av funktionerna $g(x) = 1/x$ och f, där $f'(x) = f'(x)$ och $g'(x) = -1/x^2$.

Exempel. Funktionen $h(x) = 1/x^2$ (för $x \neq 0$) är en sammansättning av $f(u) = 1/u$ och $g(x) = x^2$. Derivatorna är $f'(u) = -1/u^2$ och $g'(x) = 2x$. Alltså är

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = -\frac{1}{(x^2)^2}2x = -\frac{2}{x^3}.$$

Bevis av kedjeregeln.

Bevis. Antag att f är deriverbar i $u = g(x)$ och g är deriverbar i x. Vi vill visa att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = f'(g(x))g'(x).$$

Definiera funktionen $E(k)$ som

$$\begin{aligned}E(0) &= 0\\ E(k) &= \frac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u),\ k \neq 0.\end{aligned}$$

$E(k)$ mäter skillnaden mellan f:s derivata i u och approximationen till derivatan för ett litet k (det vill säga felet i approximationen). Enligt definitionen av derivata så är $\lim_{k\to 0} E(k) = f'(u) - f'(u) = 0$. Alltså är E kontinuerlig i $k = 0$. Vi har också för alla k

$$f(u+k) - f(u) = (f'(u) + E(k))k.$$

Sätt nu $u = g(x)$ och $k = g(x+h) - g(x)$. Då är $u + k = g(x+h)$ och vi får

$$f(g(x+h)) - f(g(x)) = (f'(u) + E(k))(g(x+h) - g(x)).$$

Eftersom g är deriverbar så är $\lim_{h\to 0}(g(x+h)-g(x))/h = g'(x)$. Funktionen g är också kontinuerlig i x. Alltså är $\lim_{h\to 0} k = \lim_{h\to 0} g(x+h) - g(x) = 0$.

Eftersom E är kontinuerlig i $k = 0$ så är $\lim_{h\to 0} E(k) = \lim_{k\to 0} E(k) = E(0) = 0$.

Om vi sätter ihop allt detta så får vi:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f'(g(x)) + E(k))(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= (f'(g(x)) + 0)g'(x) \\
&= f'(g(x))g'(x).
\end{aligned}$$

□

1.6. **Derivatan av trigonometriska funktioner.** Här kommer några resultat om trigonometriska funktioner. Först påminner vi om att funktionerna $\sin(x)$ och $\cos(x)$ är kontinuerliga för alla x.

Ett viktigt gränsvärde är

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Bevisen för derivatorna nedan använder resultaten ovan samt geometriska omskrivningar för de trigonometriska funktionerna.

Sats 2.

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x).$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x).$$

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

$$\frac{d}{dx}\cot(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x).$$

1.7. **Medelvärdessatsen.** Denna sektion ägnas åt den mycket viktiga Medelvärdessatsen. Först formulerar vi satsen, sedan visar vi några av de konsekvenser den har. Därefter formulerar och bevisar vi två hjälpsatser innan vi slutligen ger beviset för huvudsatsen.

Sats 3. Antag att f är kontinuerlig på ett slutet begränsat intervall $[a, b]$ och att den är deriverbar på det öppna intervallet (a, b). Då finns det en punkt c i (a, b) så att

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Två konsekvenser av Medelvärdessatsen:

om f har positiv derivata ($f'(x) > 0$) för alla x så att $a < x < b$ så växer f på intervallet $[a, b]$.

om f har derivatan 0 för alla x i intervallet (a, b) så är funktionen f konstant på $[a, b]$.

Nu börjar vi beviset av Medelvärdessatsen med följande sats:

Sats 4. Antag att f är definierad på det öppna intervallet (a, b) och har sitt maximala värde i punkten $c \in (a, b)$. Om f är deriverbar i c så är $f'(c) = 0$ (vi säger att c är en stationär punkt till f).

Bevis. Antag att f har sitt max i c och att $f'(c)$ finns. Då är $f(x) - f(c) \leq 0$ för alla $x \in (a, b)$. Om $c < x < b$ så är

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

alltså är $f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$.

På samma sätt om $a < x < c$ så är

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

alltså är $f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$.

Men $f'(c) \leq 0$ och $f'(c) \geq 0$ ger $f'(c) = 0$.

□

Nästa sats är så intressant i sig att den fått ett eget namn: Rolles sats.

Sats 5. Antag att f är kontinuerlig på ett slutet begränsat intervall $[a, b]$ och att den är deriverbar på (a, b). Om $f(a) = f(b)$ så finns det en punkt $c \in (a, b)$ så att $f'(c) = 0$.

Bevis. Om $f(x) = f(a) = f(b)$ för alla $x \in (a, b)$ så är f en konstant funktion och $f'(x) = 0$ för alla $x \in (a, b)$.

Annars finns det en punkt $x_0 \in (a, b)$ så att $f(x_0) \neq f(a)$. Antag att $f(x_0) > f(a)$ (om $f(x_0) < f(a)$ så blir beviset i stort sett likadant).

Eftersom f är kontinuerlig på ett kompakt intervall så har f, enligt Max-Min satsen, sitt maximala värde i någon punkt $c \in [a, b]$.

Nu är

$$f(c) \geq f(x_0) > f(a) = f(b).$$

Alltså kan c inte vara punkterna a eller b. Alltså är f deriverbar i c så enligt föregående sats är $f'(c) = 0$.

□

Nu kommer beviset för Medelvärdessatsen.

Bevis. Antag att f uppfyller villkoren i satsen. Låt

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Funktionen g mäter, givet ett x, det vertikala avståndet mellan kurvan $y = f(x)$ och den räta linjen från $f(a)$ till $f(b)$. g är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) eftersom f är det. Dessutom är $g(a) = g(b) = 0$.

Enligt Rolles sats finns det en punkt $c \in (a, b)$ så att $g'(c) = 0$.

Eftersom

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

följer att

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

1.8. **Högre derivator.** När man har deriverat en funktion f får man en ny funktion f'. Denna nya funktion kan ha, eller inte ha, alla de egenskaper som alla andra funktioner kan ha. Funktionen f' har en definitionsmängd där den är definierad. Den kan vara kontinuerlig, men behöver inte vara det. f' kan vara deriverbar. I så fall kallar man derivatan av f' för *andra derivatan* av f och betecknar den f'' (f *bis*).

Med andra beteckningar skriver vi

$$f''(x) = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

På samma sätt kan f ha en *n:te derivata* $f^{(n)}$.

1.9. **Implicit derivering.** Hittills har vi deriverat funktioner $f(x)$. Vi har också pratat om den geometriska tolkningen av derivata som lutningen hos grafen till funktionen i en punkt. Men alla kurvor i planet är inte grafen av någon funktion. Till exempel är inte cirklar ($x^2 + y^2 = K$) möjliga att beskriva på formen $y = f(x)$ (de är dock unionen av graferna till två funktioner, övre och undre halvcirkeln). Kan vi bestämma lutningen hos en sådan kurva i en punkt?

Ja, det kan vi ofta med hjälp av *implicit derivering.* Vid implicit derivering antar vi helt enkelt att ekvationen som beskriver kurvan implicit definierar y som en funktion av x och använder sedan kedjeregeln för att hitta derivatan av y.

Ett exempel visar hur det fungerar.

Exempel. Betrakta cirkeln $x^2+y^2=10$ och hitta lutningen hos kurvan i punkten $(1,3)$. Vi skriver y som en funktion av x:

$$x^2+y(x)^2=10.$$

Derivera alla termer med avseende på x:

$$\frac{d}{dx}x^2=2x, \frac{d}{dx}10=0 \text{ och } \frac{d}{dx}y(x)^2=2yy',$$

den sista via kedjeregeln.

Alltså får vi

$$2x+2yy'=0.$$

Vi bryter ut y' och får

$$y'=\frac{-2x}{2y}=-\frac{x}{y}.$$

I punkten $(1,3)$ får vi alltså $y'=-1/3$.

Denna metod ger inget värde för $y=0$ vilket är helt i sin ordning eftersom kurvan har en lodrät asymptot där. Att bevisa att implicit derivering verkligen fungerar ligger utanför denna kurs räckvidd.

1.10. **Transcendenta funktioner.** En transcendent funktion är en funktion som inte kan konstrueras genom upprepad användning av de fyra räknesätten och potenser med rationella exponenter. Transcendenta funktioner vi deriverat tidigare är de trigonometriska funktionerna.

Som beskrivs i Adams sektion 3.3 kan vi definiera en logaritm (den naturliga logaritmen $\ln x$) och motsvarande exponentialfunktion e^x så att

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x} \text{ och } \frac{d}{dx}e^x=e^x.$$

En alternativ definition är via

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Det finns också fler trigonometriska funktioner som vi är intresserade av derivatan på. Vi definierar de inversa trigonometriska funktionerna genom

$$\arcsin x=y \iff \sin y=x \text{ och } -\pi/2\le y\le\pi/2.$$

$$\arccos x=y \iff \cos y=x \text{ och } 0\le y\le\pi.$$

$$\arctan x=y \iff \tan y=x \text{ och } -\pi/2\le y\le\pi/2.$$

Dessa har derivatorna

$$\frac{d}{dx}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\frac{d}{dx}\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Vi visar det första fallet med hjälp av implicit derivering.

Om $y = \arcsin x$ så har vi

$$x = \sin y(x) \text{ och } -\pi/2 \leq y \leq \pi/2.$$

Derivera båda sidor i ekvationen med avseende på x:

$$1 = (\cos y)y'.$$

Alltså

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Men med hjälp av trigonometriska ettan ($\sin^2 + \cos^2 = 1$) och det faktum att $\cos y \geq 0$ när $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ får vi att $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$. Alltså

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1.11. **Extremvärden.** Nu ska vi börja prata lite mer om problemlösning relaterad till derivator. En första tillämpning är att bestämma extremvärden med hjälp av derivatan.

En funktion f kan ha fyra sorters *extremvärden*:

- (globalt) max värde för f
- (globalt) min värde för f
- lokalt max värde för f
- lokalt min värde för f

Ett globalt max eller min är helt enkelt det som förut hetat max eller min för f: en punkt x_0 så att $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$), för alla x där $f(x)$ är definierad, är ett globalt max (min).

Lokala extremvärden är extrema bara i en omgivning av punkten x_0. Det vill säga:

f har ett lokalt max (min) i punkten x_0 om det finns ett $h > 0$ så att $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$) för alla x där f är definierad och $|x - x_0| < h$.

Observera att alla globala extremvärden också är lokala extremvärden.

Enligt de satser vi visat om största och minsta värde för en funktion så gäller att:

Sats 6. Om f är definierad på ett intervall I och har ett lokalt max eller min i en punkt $x_0 \in I$ så är x_0 av någon av följande typ:

(1) stationär (kritisk) punkt, $f'(x_0) = 0$,
(2) singulär punkt, $f'(x_0)$ finns inte,
(3) ändpunkt på intervallet I.

Är det omvända sant? Det vill säga om vi vet att x_0 är en stationär punkt, är då x_0 ett lokalt extremvärde?

Ett bra sätt att avgöra det är med hjälp av en teckentabell. Om derivatan är positiv innan x_0 och negativ efter så är x_0 ett lokalt max. Om derivatan är negativ innan och positiv efter så är x_0 ett lokalt min. Om derivatan har samma tecken före och efter x_0 så har funktionen varken ett lokalt max eller min i x_0.

1.12. **Kurvskissning.** En mycket vanlig typ av problem handlar om kurvskissning. För att lösa ett sådant problem kan man följa schemat nedan:

Studera $\mathbf{f}(\mathbf{x})$:

- Hitta definitionsmängden för f.
- Bestäm skärningen med koordinataxlarna ($f(x) = 0, f(0) =?$).
- Har f några symmetrier?
- Hitta ev. vertikala asymptoter (nämnaren = 0).
- Hitta ev. horisontella eller sneda asymptoter ($\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$).

Studera $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$:

- Hitta definitionsmängden för f' (singulära punkter, ändpunkter).
- Stationära punkter ($f'(x) = 0$).
- Teckentabell (max eller min).

Studera ev. $\mathbf{f}''(\mathbf{x})$:

- Tecknet hos $f''(x)$ (typ av extrempunkt).

En funktion f har en *sned asymptot* om den närmar sig en rät linje $y = ax + b$ i oändligheten. Man ser att f har en sned asymptot om

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

1.13. **Approximationer.** Genom att beräkna derivatan till en funktion f i en punkt a kan vi hitta tangenten till kurvan $y = f(x)$ i a:

$$T(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Vi kan tänka på denna tangent som en linjär approximation till f (*linjär* betyder första ordningens polynom). I en bestämd mening är $T(x)$ den bästa linjära approximationen till f: det är den enda sådana där både funktionen och dess derivata har samma värde som f i a

$$T(a) = f(a) \text{ och } T'(a) = f'(a).$$

På samma sätt som med tangenten kan vi hitta en "bästa" approximation till f med polynom av högre ordning

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2.$$

För P_2 har vi

$$P_2(a) = f(a), P_2'(a) = f'(a) \text{ och } P_2''(a) = f''(a).$$

Vi kan generalisera detta till ett godtyckligt n:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

förutsatt att alla derivatorna av f finns.

P_n kallas för *Taylor polynomet* av grad n för f vid $x = a$. Om $x = 0$ säger man ofta *Maclaurin polynom*.

Hur bra approximation till f ger P_n för x nära a? Taylors sats ger svaret.

Sats 7. Om f är $n+1$ gånger deriverbar på ett intervall I så att $a, x \in I$ och om $P_n(x)$ är Taylor polynomet av grad n för f vid $x = a$ så är

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

(Taylors formel) där feltermen $E_n(x)$ (kallad Lagrangres restterm) ges av

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(X)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

för något X, $a \leq X \leq x$.

Satsen kan bevisas med hjälp av en generaliserad Medelvärdessats men vi ger att annat bevis senare i kursen.

Observera dock att $E_n(x)$ är “liten”, i alla fall betydligt mindre än $|x-a|$ för x nära a.

Taylorutvecklingar kan vara mycket användbara till exempel för att beräkna gränsvärden. Nedan ger vi några av de vanligaste vid $x = 0$. Istället för att skriva ut hela resttermen så använder vi så kallad *ordo* notation O. Med $O(x^{n+1})$ menar vi en funktion som beter sig som x^{n+1} när x går mot 0 (eller $x \to a$ i allmänhet).

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{2n+1}).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1}).$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + O(x^{2n+1}).$$