FÖRELÄSNING 3
ANALYS MN1 DISTANS HT06

JONAS ELIASSON

Detta är föreläsningsanteckningar för distanskursen Matematik A - analysdelen vid Uppsala universitet höstterminen 2006.

1. Integraler

I denna sektion går vi igenom integraler, den andra huvuddelen i kursen.

1.1. **Definition av integral.**

Vår behandling av integraler har sin grund i två på ytan helt olika problem, nämligen problemet att hitta en invers operation till derivering och problemet att bestämma arean av området under (grafen av) en funktion.

Det första problemet är alltså detta: om vi har en funktion f så kan vi hitta derivatan f' av funktionen men antag att vi istället vill hitta en funktion F så att om man deriverar F så får man f, det vill säga $F'(x) = f(x)$, för alla x. Vi inför ett namn för en sådan funktion F.

Definition 1. Antag att funktionen f är definierad på intervallet I. En funktion F kallas *primitiv funktion* (eller *anti-derivata*) till f om $F'(x) = f(x)$, för alla x i I.

Observera att den primitiva funktionen, om den finns, inte är unik. Dock, om en funktion f har två primitiva funktioner $F(x)$ och $G(x)$ så skiljer sig dessa åt med en konstant, det vill säga det finns en konstant C så att $F(x) = G(x)+C$, för alla x i I. För att se detta kan man betrakta differensen $(F - G)(x)$ mellan de primitiva funktionerna. Derivatan av $F - G$ är noll på I och alltså är funktionen konstant.

Hur man kan hitta en primitiv funktion till en given funktion återkommer vi till. Istället ska vi fundera på hur man kan bestämma arean av området mellan en funktion och x-axeln (mellan två givna x-värden).

Den metod vi väljer bygger på att vi delar in x-axeln i många små intervall och att vi på varje intervall approximerar arean under kurvan med rektanglar som är ungefär lika stora och vars area vi lätt kan bestämma.

Vi beskriver det hela lite mer formellt:

Låt f vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[a, b]$. En *partition* P av $[a, b]$ är en mängd punkter x_i så att

$$P = \{a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}.$$

Vi skriver $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ för bredden på varje delintervall.

Eftersom $[x_i, x_{i+1}]$ är kompakt och f kontinuerlig så antar funktion sitt största och minsta värde på intervallet, det vill säga det finns punkter $l_i, u_i \in [x_i, x_{i+1}]$ så att

$$f(l_i) \leq f(x) \leq f(u_i),$$

för alla x i $[x_i, x_{i+1}]$.

Det betyder att om vi betecknar arean av området mellan kurvan $y = f(x)$ och x-axeln för x mellan x_i och x_{i+1} med A_i så är

$$f(l_i)\Delta x_i \leq A_i \leq f(u_i)\Delta x_i.$$

Givet en funktion f och en partition P definierar vi
under Riemannsumman $L(f, P) = \sum_{1=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i$.
över Riemannsumman $U(f, P) = \sum_{1=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$.

Definition 2. Om det för en funktion f finns exakt ett tal I så att för varje partition P av intervallet $[a, b]$ vi har att

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P),$$

så säger vi att f är *integrerbar* på $[a, b]$.
I är integralen av f och betecknas

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

1.2. **Grundläggande satser om integraler.** Att det finns väldigt många integrerbara funktioner säger följande sats, som vi tyvärr inte bevisar.

Sats 1. Om funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ så är f integrerbar på $[a, b]$.

Man kan till och med utsträcka satsen ovan genom att säga att styckvis kontinuerliga funktioner är integrerbara. En styckvis kontinuerlig funktion är en funktion som är definierad på flera olika delintervall och kontinuerlig på dessa men inte nödvändigtvis på hela intervallet. Integralen räknas ut genom att räkna ut integralen på de olika delintervallen.

Notera också att värdet av en integral inte beror på värdet hos funktionen i en punkt, det vill säga om man definierar om funktionen så ändras inte integralen.

Nu följer några räkneregler för integraler. De flesta är ganska självklara om man tänker på integralen som arean av en yta.

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Om $a \leq b$ och $f(x) \leq g(x)$, för alla $x \in [a,b]$ så

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Triangelolikheten för integraler: om $a \leq b$ så

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Om f är en udda funktion, det vill säga $f(-x) = -f(x)$, så

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Om f är en jämn funktion, det vill säga $f(-x) = f(x)$, så

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

1.3. **Medelvärdesatsen för integraler.** Följande sats är Medelvärdesatsen för integraler.

Sats 2. Låt f vara en kontinuerlig funktion på intervallet $I = [a,b]$. Då finns $c \in I$ så att

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Bevis. Eftersom f är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet I så antar f sitt max och min på I. Säg att max $= M = f(u)$ och att min $= m = f(l)$.

Betrakta partitionen $P = \{a = x_1 < x_2 = b\}$. Enligt definitionen av integral så är

$$L(f,P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f,P).$$

I detta fall är $L(f,P) = f(l)(b-a)$ och $U(f,P) = f(u)(b-a)$. Alltså kan vi skriva om olikheterna ovan som

$$f(l) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(u).$$

Enligt Satsen om mellanliggande värde finns ett $c \in I$ så att

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Alltså $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$.

$\square$

Definition 3. Om f är integrerbar på $[a, b]$ så är *medelvärdet* av f på $[a, b]$

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

1.4. **Analysens huvudsats.** Hittills har vi inte föreslagit någon metod för att räkna ut integralen av en funktion. Men Analysens huvudsats ger en sådan, och nu kommer också den primitiva funktionen till användning.

Sats 3. Antag att funktionen f är kontinuerlig på ett intervall I och att $a \in I$.
Del 1: Definierad funktionen F på I genom

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Då är F deriverbar på I och $F'(x) = f(x)$, för alla $x \in I$. Med andra ord

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Del 2: Låt $G(x)$ vara någon primitiv funktion till $f(x)$ på I (det vill säga $G'(x) = f(x)$). Då är, för varje $b \in I$,

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Bevis. Del 1:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(hf(c)), \text{ något } c \in [x, x+h] \\
&= \lim_{c \to x} f(c), c \to x \text{ när } h \to 0 \\
&= f(x), f \text{ kontinuerlig.}
\end{aligned}$$

Del 2: Om $G'(x) = f(x)$ så är $F(x) = G(x) + C$ på I, för någon konstant C (två primitiva funktioner till samma funktion). Alltså

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) = G(x) + C.$$

Sätt $x = a$. Då $0 = G(a) + C$, det vill säga $C = -G(a)$. Sätt $x = b$ och vi får

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) + C = G(b) - G(a).$$

□

1.5. **Metoder för integrering.** Nu har vi formellt definierat integralen samt visat sambandet mellan integral och primitiv funktion. Men tyvärr räcker inte det för att räkna ut integralen av många vanliga funktioner. Istället får man ofta använda någon sorts knep eller strategi och nedan följer en uppräkning av sådana.

Primitiv funktion Ibland kan man naturligtvis använda Analysens huvudsats för att räkna ut en integral. Om F är en primitiv funktion till f så har vi alltså

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

En användbar primitiv funktion att komma ihåg är

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C.$$

Variablebyte Kallas också substitution. Variabelbyte är en tillämpning av kedjeregeln för derivator. Antag att f är kontinuerlig och att g är deriverbar. Då kan man räkna ut integralen

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$$

med hjälp av variablebytet $u = g(x)$. Vi kan nu se u som en (implicit) funktion av x. Om vi deriverar båda sidor med avseende på x får vi

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \text{ vilket ger } du = g'(x)dx.$$

Gränserna för den nya integralen får vi gonom att stoppa in $x = a$ och $x = b$ i $g(x)$. Alltså

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Bevis. Låt F vara en primitiv funktion till f, $F'(t) = f(t)$. Då är enligt kedjeregeln

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Alltså är

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= \Big[F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))\\ &= \Big[F(x)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.\end{aligned}$$

Partiell integration På engelska integration by parts. Partiell integration kan man använda när man ska integrera produkten av två funktioner. Man väljer vilken av funktionerna man ska derivera och vilken man ska hitta en primitiv funktion till och sedan använder man formeln

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx,$$

där $G'(x) = g(x)$.
Metoden är användbar till exempel om en av funktionerna är ett polynom (som försvinner när den deriverats några gånger) och den andra funktionen är en trigonometrisk funktion eller exponential funktion (som inte ändras så mycket om man tar en primitiv istället). Metoden bygger på räkneregeln för derivatan av en produkt.

Bevis. Beräkna derivatan av $f(x)G(x)$:

$$\frac{d}{dx}(f(x)G(x)) = f(x)g(x) + f'(x)G(x).$$

Integrera båda sidor så får man:

$$f(x)G(x) = \int f(x)g(x)dx + \int f'(x)G(x)dx.$$

Bryt ut $\int f(x)g(x)dx$ och formeln är klar.

Inversa substitutioner Med invers substitution menar vi en substitution där vi byter ut integrationsvariabeln x mot en funktion av en annan variabel, $g(u)$. Om $x = g(u)$ så kan vi derivera båda sidor med avseende på u och får

$$\frac{dx}{du} = g'(u) \text{ vilket ger } dx = g'(u)du.$$

För att hitta en nya integrationsgränser istället för $x = a$ och $x = b$ får vi hitta u_a och u_b så att $g(u_a) = a$ och $g(u_b) = b$. Alltså får vi följande omskrivning

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u_a}^{u_b} f(g(u))g'(u)du.$$

I allmänhet ger alltså den inversa substitutionen en mer komplicerad integral än den ursprungliga. Men trots det finns det situationer när denna typ av variablebyten är användbara i integrationsräkning.

Nedan följer några exempel:

Integranden innehåller ett uttryck av formen $\sqrt{a^2 - x^2}$, för $-a \leq x \leq a$.
Om man då gör substitutionen $x = a \sin u$, för $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$, så blir

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos u,$$
$$\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \tan u$$

och

$$dx = a \cos u \, du.$$

Integranden innehåller ett uttryck av formen $\sqrt{a^2 + x^2}$.
Om man då gör substitutionen $x = a \tan u$ så blir

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos u}$$

och

$$dx = \frac{a}{\cos^2 u} du.$$

Partialbråksuppdelning På engelska parttial fractions.
Partialbråksuppdelning är en del av ett allmänt schema för att integrera rationella funktioner. En rationell funktion är en funktion som kan skrivas

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

där $P(x)$ och $Q(x)$ är polynom. Kom ihåg att gradtalet hos ett polynom (grad($P(x)$)) är den största exponenten i polynomet.
Schema för att integrera en rationell funktion $P(x)/Q(x)$:

Steg 1. Om grad$(P(x)) \geq$ grad$(Q(x))$ gör polynomdivision.

Steg 2. Om grad$(P(x)) <$ grad$(Q(x))$ och grad$(Q(x)) > 2$ gör partialbråksuppdelning.

Steg 3. Om grad$(P(x)) <$ grad$(Q(x))$ och grad$(Q(x)) \leq 2$ integrera med hjälp av känd integral, logaritm som primitiv funktion eller variabelbyte.

Partialbråksuppdelning: syftet med partialbråksuppdelning är att skriva om en rationell funktion som en summa av rationella funktioner med lägre gradtal. För att illustrera metoden kommer vi att titta på fallet där $Q(x)$ har grad två och $P(x)$ grad ett eller noll (konstant). Börja med att faktorisera $Q(x)$. Vi får då tre fall:

Fall 1. $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)$, $a_1 \neq a_2$. Vi gör nu ansättningen

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2}.$$

Vi kan nu sätta upp termerna på högersidan på gemensamt bråkstreck.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(A_1)(x - a_2) + (A_2)(x - a_1)}{(x - a_1)(x - a_2)}.$$

Eftersom nämnaren är lika på båda sidor måste täljarna vara lika. Om $P(x) = px + q$ får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} p = A_1 + A_2 \\ q = -A_1a_2 - A_2a_1 \end{cases}$$

Eftersom p och q och a_1 och a_2 är kända så kan vi hitta A_1 och A_2 och därmed skriva den rationella funktionen $P(x)/Q(x)$ som summan av två rationella funktioner där nämnarna har gradtal ett.

Fall 2. $Q(x) = (x - a)^2$. Om vi skulle göra ansättningen ovan skulle båda termerna i högerledet vara samma. Istället gör vi ansättningen

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2}.$$

Sen fortsätter vi som i fall 1 (sätt upp på gemensamt bråkstreck, lös ekvationssystem).

Fall 3. $Q(x) = x^2 + ax + b$ (t.ex. $x^2 + 1$). Nu gör vi ansättningen

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + B}{x^2 + ax + b}.$$

Sen fortsätter vi som i fall 1.
För rationella funktioner där nämnaren har högre gradtal än två är det bara att faktorisera nämnaren och sen kombinera fallen ovan.

1.6. **Generaliserade integraler.** Alla de integraler vi stött på hitills har varit av begränsade funktioner på slutna och begränsade intervall. Faktum är att själva definitionen av integral som vi sett bara fungerar i sådana fall. Men det är lätt att utöka defintionen till så kallade generaliserade integraler. Dessa finns av två typer: integralen över ett oändligt intervall eller integralen av en obegränsad funktion. Definitionerna ser ut som följer:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx.$$

Integralen finns om gränsvärdet finns.

Antag att funktionen $f(x)$ är obegränsad eller odefinierad i punkten a. Då är

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a} \int_c^b f(x)dx.$$

1.7. **Volymen hos en rotationskropp.** När vi definierade integralen så gjorde vi det som arean under en kurva. Det betyder inte att allt man räknar ut som integral är en area. I fysiken finns det naturligtvis många tillämpningar där resultatet av att beräkna en integral inte har enheten kvadratmeter. Men även i den rena matematiken kan man räkna ut annat med integraler: till exempel volymer.
För att beräkna allmäna volymer använder man naturligtvis helst så kallade dubbelintegraler (motsvarigheten till integraler för funktioner av två variabler). Dubbelintegralen har samma direkta förhållande till volymen som (enkel-)integralen har till arean. Men för speciella typer av kroppar i tre dimensioner kan man bestämma deras volym med hjälp av enkelintegralen. Dessa kroppar är rotationskropparna.
En rotationskropp uppstår när man tar en kurva i två dimensioner ($y = f(x)$, för $a \leq x \leq b$) och roterar den kring x- eller y-axeln (i princip kan man rotera den kring vilken linje som helst men vi håller oss till det enklaste fallet). Vi kommer nu att presentera två formler för att beräkna volymen av en rotationskropp (beroende på om kurvan roterats kring x- eller y-axeln) som båda bygger på samma princip: vi kan bestämma voymen genom att skiva upp kroppen i oändligt tunna skivor, bestämma arean av varje skiva, och sedan integrera över dessa areor. Man kan se detta som en generalisering av enkelintegralen: vi delar upp arean under lurvan i oändligt smala streck, bestämmer höjden av strecket (som är $f(x)$), och integrerar över höjderna för att få arean. De två formlerna heter skivformeln och skalformeln.

Skivformeln: antag att en kropp K i tre dimensioner uppstått genom att kurvan $y = f(x)$, för $a \leq x \leq b$, roterats kring x-axeln. Då ges volymen V av K av

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Motivation för formeln: för varje c mellan a och b vill vi bestämma arean av den oändligt tunna skivan vid c. Eftersom kroppen uppstått genom att $y = f(x)$ roterats kring x-axeln så är skivan en disk. Disken har radie $f(c)$ eftersom det är avståndet från x-axeln till kurvan vid c. Alltså har disken area $\pi(f(x))^2$. Nu integrerar vi arean för alla punkter mellan a och b och får formeln ovan.

Skalformeln: antag att en kropp K i tre dimensioner uppstått genom att kurvan $y = f(x)$, för $a \leq x \leq b$, roterats kring y-axeln. Då ges volymen V av K av

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Motivation för formeln: vi tänker på K som en lök och skalar av den skal efter skal. Varje tunn skiva är nu istället en ihålig cylinder. För varje c mellan a och b uppstår, när vi roterar kurvan kring y-axeln, ett ihåligt cylinderskal. Dessa cylinderskal bildra tillsammans hela K. För varje c har cylinderskalet höjden $f(c)$ och omkretsen är samma som för en cirkel med radie c, alltså $2\pi c$. Arean blir då $2\pi c f(c)$ och vi får formeln ovan.