FÖRELÄSNING 4
ANALYS MN1 DISTANS HT06

JONAS ELIASSON

Detta är föreläsningsanteckningar för distanskursen Matematik A - analysdelen vid Uppsala universitet höstterminen 2006.

I denna sektion går vi igenom det om serier och summor som ingår i kursen.

1. Definitioner

Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara en *talföljd* av reella tal. Då kallar vi den *formella summan*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

av de oändligt många talen för en *oändlig serie*. Talen a_i kallas för seriens *termer*.

För en talföljd kan vi definiera en följd av delsummor (eller partialsummor)

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Vi säger att den oändliga serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergerar* med summa s om

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Annars säger vi att serien *divergerar*.

Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar så har vi att $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Från detta får vi ett kriterium för divergens: om $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ så divergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

1.1. **Jämförelsekriterier.**

Det enklaste sättet att visa att en serie är konvergent är att jämföra med en serie som man vet är konvergent. Sådana jämförelsekriterier kan formuleras på flera olika sätt.

antag att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är två positiva serier (d.v.s. $a_k \geq 0$ och $b_k \geq 0$, för alla k).

om det finns konstanter C och K så att för alla $k > K$ så är $a_k \leq Cb_k$ då gäller att om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar så gör $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ det också.

om det finns konstanter $C > 0$ och K så att för alla $k > K$ så är $a_k \geq Cb_k$ då gäller att om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergerar så gör $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ det också.

om $\lim_{k\to\infty} a_k/b_k > 0$ så konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ om och endast om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ gör det.

Om man inte har någon serie att jämföra med kan man försöka med en integral. Antag att $f(x)$ är positiv och avtagande på intervallet $[n, \infty)$. Då gäller att

$$\int_n^{\infty} f(x)dx < \infty \text{ om och endast om } \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \text{ konvergerar.}$$

1.2. **Jämförelseserier.** För att kunna använda kriterierna ovan behöver vi serier att jämföra med. Här kommer några standardserier: Geometriska serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ om och endast om } |x| < 1.$$

Harmoniska serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergerar.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \text{ konvergerar om } p > 1.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p} \text{ konvergerar om } p > 1.$$

1.3. **Andra konvergenskriterier.** Rotkriteriet: antag att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är en positiv serie och att

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = A.$$

Då konvergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ om $A < 1$ och divergerar om $A > 1$.

Kvotkriteriet: antag att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är en positiv serie och att

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = A.$$

Då konvergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ om $A < 1$ och divergerar om $A > 1$.

1.4. **Alternerande serier.** De kriterier vi hitills presenterat gäller bara för positiva serier. Serier som inte är positiv är mycket besvärligare att hantera. För *alternerande* serier, serier där varannan term är positiv och varannan negativ (eller där $a_k a_{k+1} < 0$, för alla k), finns dock ett konvergenskriterium:

om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är en alternerande serie så att $|a_k| > |a_{k+1}|$ för alla k så konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.