FÖRELÄSNING 5
ANALYS MN1 DISTANS HT06

JONAS ELIASSON

Detta är föreläsningsanteckningar för distanskursen Matematik A - analysdelen vid Uppsala universitet höstterminen 2006.

I denna sektion går vi igenom det om differentialekvationer som ingår i kursen. Teorin om differentialekvationer är omfattande och ämnet behandlas i egna kurser men en liten del ingår även i denna kurs. Det man ska kunna är att lösa fyra sorters differentialekvationer. Kortfattat så är en differentialekvation en ekvation mellan funktioner som inbegriper en okänd funktion $y(x)$ samt derivator av denna $y'(x)$, $y''(x)$ o.s.v.

1. Första ordningens differentialekvationer

En första ordningens differentialekvation innehåller bara första derivatan av den okända funktionen $y(x)$. Vi lär oss att lösa två typer av första ordningens differentialekvationer: separabla samt linjära.

1.1. Separabla första ordningens differentialekvationer.

En separabel första ordningens differentialekvation kan skrivas på formen

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

för några funktioner f och g. Man kan då separera variablerna så att man bara får y på ena sidan och bara x på andra:

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx.$$

Nu kan vi integrera båda sidor och få

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx.$$

Därmed har vi hittat, i alla fall, en implicit lösning till ekvationen. I vissa fall kan vi också hitta en explicit lösning (på formen $y(x) = \ldots$) men inte alltid.

1.2. Linjära första ordningens differentialekvationer.

I en linjär första ordningens differentialekvation förekommer inte några potenser av $y(x)$ eller $y'(x)$. Den kan alltså skrivas på följande form

$$a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

Vi skriver om den som

$$y' + p(x)y = q(x).$$

En ekvation på denna form kan lösas med hjälp av en så kallad integrerande faktor $i(x)$. Poängen med den integrerande faktorn är att kunna skriva vänsterledet i ekvationen ovan som derivatan av produkten $y(x)i(x)$ multiplicerat med $i(x)$

$$(yi)'(x) = y'i(x) + yi'(x) = i(x)(y' + \frac{i'(x)}{i(x)}y).$$

För att detta ska vara vänsterledet i ekvationen måste alltså $\frac{i'(x)}{i(x)} = p(x)$. Detta är sant om $\ln i(x) = \int p(x)dx$, vilket kan skrivas som

$$i(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

Alltså om vi låter $i(x)$ ges av uttrycket ovan så har vi att

$$(yi)'(x) = i(x)(y' + p(x)y) = i(x)q(x).$$

Vi kan integrera båda sidor och får

$$y(x)i(x) = \int i(x)q(x)dx.$$

Lös ut $y(x)$

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{i(x)} \int i(x)q(x)dx \\ &= e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx. \end{aligned}$$

2. Andra ordningens differentialekvationer

En andra ordningens differentialekvation kan innehålla förutom första derivatan av $y(x)$ också andra derivatan. Vi lär oss att lösa en typ av andra ordningens differentialekvationer, linjära ekvationer med konstanta koefficienter, med två olika högerled. Dessa kallas homogena och inhomogena ekvationer.

2.1. Homogena andra ordningens linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter.

En homogen andra ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter kan skrivas som

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Den är homogen eftersom högerledet är lika med noll, linjär eftersom den inte innehåller några potenser av y eller dess derivator, och a samt b är alltså konstanter, inte funktioner.

Ekvationen löses genom att sätta upp den karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ samt hitta dess lösningar. Vi bryr oss bara om de fall då lösningarna är reella och då finns det två möjligheter: ekvationen har två skilda lösningar eller en dubbelrot.

Om den karakteristiska ekvationen har två skilda reella lösningar r_1 och r_2 så är den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

Om den karakteristiska ekvationen har en dubblerot r så ges den allmänna lösningen till differentialekvationen av

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}.$$

2.2. **Inhomogena andra ordningens linjär differentialekvationer med konstanta koefficienter.** Den inhomogena ekvationen

$$y'' + ay' + by = h(x)$$

löser man genom att först hitta den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation (det vill säga: sätt högerledet lika med noll) och därefter hittar man en partikulär lösning till den inhomogena ekvationen. Summan av den allmänna samt partikulär lösningen är lösningen till ekvationen.

För att hitta en partikulär lösning gör man en ansättning. Gissa hur lösningen ser ut (till exempel $y(x) = A \sin 2x + Bx$). Stoppa in i ekvationen (räkna ut $y'(x)$ och $y''(x)$). Bestäm värdet på konstanterna ($A = 2$ och $B = 0$).

Man behöver dock inte göra ansättningen helt i blindo. Om $h(x)$ innehåller polynom, exponentialfunktioner $e^{\alpha x}$, trigonometriska funktioner $\sin \beta x$, $\cos \beta x$ eller kombinationer av dessa så gör man en ansättning av samma typ (om $h(x) = \cos 3x + 2e^{3x}$, ansätt $A \cos 3x + Be^{3x}$).

Det finns ett specialfall: om man enligt regeln ovan borde göra en ansättning $Ae^{\alpha x}$ men detta redan är en del av den allmänna lösningen av den homogena ekvationen så gör man istället ansättningen $Axe^{\alpha x}$. Om den karakteristiska ekvationen för den homogena ekvationen hade en dubbelrot och $Axe^{\alpha x}$ också är en del av den allmänna lösningen får man ansätta $Ax^2 e^{\alpha x}$. Överhuvudtaget kan man försöka med att multiplicera sin ansättning med x om det inte fungerar.

3. Begynnelse- och randvillkor

I allmänhet har en differentialekvation oändligt många lösningar. Men man kan lätt tänka sig att man vill hitta en viss funktion som löser ekvationen. Det kan man göra genom att helt enkelt lägga till ett villkor på lösningen:

> Hitta den lösning till differentialekvation ... som uppfyller att $y(0) = 0$.

Villkoren kan också gälla derivatorna av y ("så att $y''(0) = -2$") eller värdet i flera olika punkter ("så att $y'(0) = 0$ och $y'(1) = 1$").