Läsanvisningar till endimensionell analys (distans ht 2005)

(Dessa läsanvisningar gäller för den 5:e upplagan)

Kapitel P

Kap P

Kapitel P, som börjar på sid 3 i Adams, innehåller en del repetition av sådant som ni bör känna till, men även mycket som lär vara nytt för de flesta av er.

Läs igenom avsnitt P1. En beteckning skiljer sig från den vanliga i Sverige: Adams skriver (a,b) för det öppna intervallet mellan a och b, som vi brukar skriva $]a,b[$.

Olikheter spelar en viktig roll i matematisk analys. Räknereglerna på sid 4 ska ni behärska. Regel 4 är den lömskaste av dem. Det kan ofta vara vettigt att undvika att ens behöva använda den. Ett exempel på detta ser ni i olikheten (c) i **Ex. 2**, sid 6. I stället för den lösning som står i boken föreslår vi följande:

$$\frac{2}{x-1} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-5(x-1)}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{7-5x}{x-1} \geq 0.$$

Man skriver alltså om olikheten så att man får en nolla på ena sidan av olikhetstecknet. Sedan gör man ett *teckenstudium*, t ex med hjälp av en tabell i stil med den här:

x		1		$7/5$	
$7-5x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(7-5x)/(x-1)$	$-$	odef	$+$	0	$-$

"odef" anger att uttrycket inte är definierat för det aktuella x-värdet. Vi kan nu avläsa att olikheten är sann för $1 < x \leq \frac{7}{5}$.

I **Ex. 3** löses ett par s k dubbla olikheter. Även här kan man med fördel illustrera lösningarna med hjälp av talllinjer. Också i **Ex. 4-5** kan teckenstudietabell vara ett bra hjälpmedel.

Absolutbeloppet av ett reellt tal är ett mycket viktigt begrepp. Det används ofta för att beskriva *avstånd* (på tallinjen) mellan tal. Avståndet mellan punkterna x och y ges av $|x-y|$. Räknereglerna på sid 9 är viktiga – de kommer att användas ideligen framigenom! I **Ex. 7-9** visas hur man kan hantera uttryck som innehåller absolutbelopp. Ibland kan en olikhet eller en ekvation direkt tolkas som ett påstående om avstånd (**Ex. 8** och **Ex. 9**), annars får man söka rätt på de "brytpunkter" där uttrycket innanför beloppsstrecken byter tecken och sedan studera utsagan mellan dessa punkter. Vi ger ett exempel.

◇ ◇

Exempel. Lös ekvationen $|x+5| - 2|x| = 1 \quad (*)$.

Lösning: "Brytpunkterna" är $x = -5$ och $x = 0$. Detta ger tre delar av x-axeln att undersöka:

$\boxed{x \geq 0}$: Då är $|x+5| = x+5$ och $|x| = x$. Ekvationen är då ekvivalent med att $x+5-2x = 1$, dvs $x = 4$. Eftersom $4 \geq 0$ har vi funnit en lösning (som dessutom lätt kontrolleras genom insättning i ekvationens vänsterled.

$\boxed{-5 \leq x < 0}$: fortfarande är $|x+5| = x+5$ men $|x| = -x$. Vi får nu $x+5-2(-x) = 1$, dvs $3x = -4$ och lösningen är $x = -\frac{4}{3}$, som också den ligger i rätt intervall och alltså är en lösning.

$\boxed{x < -5}$: Nu säger (*) samma sak som $-x-5+2x=1$ dvs $x=6$. Men detta x-värde ligger inte i det intervall som vi studerar, det är en *falsk* rot.

Svar: Ekvationen har lösningarna $x_1 = 4$ och $x_2 = -\frac{4}{3}$.

◇ ◇

(Själva brytpunkterna kan föras till vilket som helst av de båda intervallen, eftersom $|0| = 0 = -0$.)

På avsnitt P1 bör ni lösa ett antal **övningar sid 11: nr 7-12, 13, 15, 17, 19, 21, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43.** Dessutom följande problem:

• Lös ekvationen $|x+1|+|x-1| = |x|$.

Läs igenom avsnitt P2. Här bör mycket vara bekant. Ett par engelska ord: det som Adams kallar *inclination* kan vi kalla *lutningsvinkel*, medan *slope* är *riktningskoefficient* eller helt enkelt *lutning*. **Gör övningarna 7, 9, 23, 27 på sid 18.**

Fortsätt med P3. **Ex. 1–4** är viktiga. Definitionen av *parabel* uppe på sid 21 är ny, liksoms parabelns speglingsegenskaper. Skalning och förflyttning av grafer är nyttig kunskap men bör vara känt sedan tidigare. Slutligen hör det till allmänbildningen att veta vad en ellips och en hyperbel är för något. **På sid 25 räknar ni problem 3, 7, 11, 13, 15, 41, 45, 47, 49.**

I avsnitt P4 definieras vad en *funktion* är. Det är det viktigaste begreppet i hela analyskursen, och missuppfattningar av funktionsbegreppet är vanliga så slarva inte förbi det! Studera **Ex 2-5**. Ordet *domain* översätts vanligen med *definitionsmängd* och *range* med *värdemängd*.

Likaså **Ex 6**: När man skall rita grafen av en funktion räcker det inte med att pricka in några punkter. Man måste också veta hur ”snäll” grafen kan vara mellan dessa punkter. Metoder för att undersöka detta är en viktig del av analysen. Studera även **Ex 7-8. Lös följande övningar på sid 35: 1, 3, 5, 7, 8.**

På sid 31 talas om jämna och udda funktioner. Dessa begrepp är ofta till stor hjälp (och kan spara mycket arbete) när man håller på med analys. Lär er därför att känna igen denna typ av egenskap. (Observera att en ”godtycklig” funktion i allmänhet varken är udda eller jämn.) Det som står om spegling (reflection) i räta linjer är inte så viktigt i detta sammanhang. Det är inte särskilt svårt och behandlas i t ex kursen i Linjär algebra. **Övningar på sid 35: 11–22, 33, 37.**

Läs avsnitt P5. Det viktigaste här är sammansättning (eng. composition) av funktioner. Studera **Ex 3–5**. I **Ex 6** och **7** definieras ett par speciella funktioner, *Heaviside* och *signum*, som då och då används för att illustrera olika saker i det kommande. **Ex 10–11** är också värda att betrakta. **Övningar sid 41–42: 5, 7, 25, 29, 33.**

Avsnitt P6 innehåller en del material som bör vara känt sedan gymnasiet. Definition 6 och de skuggade formlerna på sid 45–46 skall man kunna utantill (och kunna illustrera med hjälp av figur). Kom ihåg att enhetscirkeln alltid är ett utmärkt stöd när man håller på med trigonometriska funktioner. Notera också att sin är en *udda* funktion och cos en *jämn* funktion.

Värdena i tabell 5 på sid 46 ska man också kunna komma ihåg med hjälp av att rita en lämplig triangel och/eller en enhetscirkel. Additionsformlerna i Theorem 1 kan tyckas krångliga att memorera, men det *är* inte svårt att komma ihåg t ex den första och den tredje. (Och kan man dem så kan man rekonstruera de övriga.) De skuggade formlerna på sid 48 är också sådana som man måste ha med sig vart man går.

Utöver sinus och cosinus är det framför allt tangens som man skall känna närmare till: möjligen också cotangens. Däremot räcker det att kunna *definitionerna* av sec och csc – de används sällan, och kan då lika gärna skrivas som 1/cos respektive 1/sin.

Läs igenom **Ex 8–11** och notera sinus- och cosinussatserna i Theorem 2.

Övningar på trigonometriska funktioner: **räkna alla med udda nummer 1–29 sid 55–56, och lös dessutom några trigonometriska ekvationer:**

(a) $\cos x = \frac{1}{2}$, (b) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, (c) $\sin x = \cos x$

(d) $\cos 2x = \cos 3x$, (e) $\cos 2x = \sin 3x$ (Ledning: $\sin a = \cos(\frac{\pi}{2} - a)$)

Kapitel 1

Kap. 1

Kapitel 1 handlar om det matematiska begrepp som karakteriserar den matematiska analysen, nämligen *gränsvärde*. Olika typer av gränsvärden används för att definiera andra begrepp som kontinuitet, derivata, integral m m.

Läs igenom avsnitt 1.1. Ni har nog sett saker som liknar **Ex 1–3** i gymnasieböckerna. Resonemanget om cirkelns area härstammar från Archimedes (200-talet f Kr). **Räkna övningarna 5–8 på sid 62.**

I avsnitt 1.2 definieras den första typen av gränsvärde. Tänk noga efter vad som står i den inramade definitionen nere på sid 63. I den svenska översättningen förekommer de två uttrycken ”godtyckligt nära” och ”tillräckligt nära”. Tänk igenom vilken roll dessa fraser spelar i själva definitionen.

En del av exemplen och övningarna på avsnitt 1.2 kan tyckas ganska triviala och innehållslösa. Det beror på att Adams inte arbetar med särskilt många typer av funktioner än så länge. Det kommer mer spännande exempel på gränsvärden senare.

Läs i alla fall igenom avsnittet, och notera särskilt vad som händer i **Ex 2** och **4–11**. Räknereglerna i Theorem 2–4 accepterar vi tills vidare utan bevis.

Här förekommer ofta att man faktoriserar polynom. För att göra detta kan man använda *faktorsatsen för polynom*, som säger att ett polynom $p(x)$ innehåller en faktor $(x-a)$ om och endast om $p(a) = 0$. Exempel: om $p(x) = x^3 - 2x + 1$, så ser man att $p(1) = 0$. Alltså måste $p(x)$ kunna skrivas som en produkt av $(x-1)$ och ett annat polynom $q(x)$. Man kan bestämma $q(x)$ genom *polynomdivision*, som ingår i algebrakursen. Men ofta kan man ta en genväg. Man inser att $q(x)$ måste vara av andra graden, så att

$$p(x) = x^3 - 2x + 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

för vissa tal a, b, c. Det är mycket lätt att förstå att a måste vara 1 och c måste vara -1 (motivera!). Nu måste alltså gälla

$$x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + bx - 1)$$

vilket bara kan vara uppfyllt för alla x om $b = 1$ (varför?). Alltså är $p(x) = (x-1)(x^2 + x - 1)$. Om man sedan behöver faktorisera andragradspolynomet vidare, får man lösa en andragradsekvation osv.

Övningarna på sid 70–71 är väldigt många, men de flesta av dem är inte så svåra. Räkna en ordentlig dos av dem! Exempelvis följande: **7, 11, 15, 21, 23, 25, 29, 31–33, 35, 57–60, 75, 78**.

I avsnitt 1.3 handlar det först om gränsvärden då en variabel går mot oändligheten. Observera att ”oändligheten” inte är något matematiskt *objekt*. När ordet används, är det för att markera att det inte finns någon begränsning (åt höger eller vänster eller vad det nu handlar om i sammanhanget). Definition 4 på sid 70 innehåller också orden ”godtyckligt” och ”tillräckligt”.Tänk återigen efter vad de har för funktion i definitionen!

Läs igenom **Ex 1–5**. I anslutning till **Ex 2**: om man ska beräkna ett gränsvärde då $x \to -\infty$, är det ofta en god idé att sätta $x = -t$ och istället låta $t \to \infty$. (De flesta finner det enklare att handskas med positiva tal.) **Lös övningarna 3, 5–7, 9–10 på sid 77–78.**

Andra halvan av avsnitt 1.3 handlar om ”oändliga gränsvärden” eller (i svensk terminologi) *oegentliga* gränsvärden. **Ex 6–10** sid 74–76 visar på ett antal olika fall av detta. Begreppet *asymptot* återkommer senare i kursen i andra sammanhang. **Övningar på sid 77–78: 15, 23, 30, 31.** Titta också på **övning 49–54**.

Läs igenom avsnitt 1.4. Här finns många viktiga och användbara idéer. Definitionerna på sid 79–80 är variationer på ett och samma tema. **Ex 1–6** illustrerar definitionerna, och det är meningen att de ska kännas naturliga. Lite mer djupsinnigt är **Ex 7**.

Sats 8 (”max-min-satsen”) är mycket viktig. Den kommer att användas flitigt när vi kommer till problemlösning i kapitel 3 och senare. Läs och begrunda **Ex 9**. (Avsnittet om grafisk bestämning av max och min kan hoppas över.) Sats 9 (”satsen om mellanliggande värden”) kan tyckas självklar, men den är mycket användbar. **Ex 10** är inte så överraskande, men **Ex 11** och **12** är värdefulla. Likaså den avslutande anmärkningen på sid 87. **Gör följande övningar på sid 87f: 1–3, 5, 7, 13, 14, 17, 19, 29, 30**.

Avsnitt 1.5 innehåller mer precisa formuleringar av gränsvärdesdefinitionerna. Dessa är nödvändiga om man ska göra logiskt oantastliga bevis för satser om gränsvärden, t ex räknereglerna i avsnitt 1.2. Det fall som är lättast att förstå är nog det som behandlas i definition 11: gränsvärde då variabeln går mot oändligheten. Läs **Ex 6**.

Notera att i definitionen av gränsvärde

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

så måste vi veta vad talet L är innan vi kan verifiera att det är gränsvärdet.

I följande exempel har vi ett gränsvärde då x ska gå mot både $+\infty$ och $-\infty$.

◇ ◇

Exempel. Undersök $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ då $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{x^2+1}$

Lösning: Om man prövar med stora värden på x så ser man att värdena på bråket verkar ligga nära 2. Vi uppskattar avståndet mellan uttrycket och 2:

$$\begin{aligned} |f(x)-2| &= \left|\frac{2x^2+3x}{x^2+1} - 2\right| = \left|\frac{2x^2+3x-2(x^2+1)}{x^2+1}\right| = \frac{|3x-2|}{x^2+1} \le \frac{3|x|+2}{x^2+1} \\ &\overset{(*)}{\le} \frac{3|x|+|x|}{x^2+1} \le \frac{4|x|}{x^2} = \frac{4}{|x|} \end{aligned}$$

Olikheten (*) gäller så snart $|x| \ge 2$. Det sista uttrycket är lätt att ta hand om. Om ε är ett positivt tal, vilket som helst, så gäller att

$$\frac{4}{|x|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{4}{\varepsilon}.$$

Om vi sätter $R_0 = 4/\varepsilon$ och $R = \max(2, R_0)$ (dvs det största av de två talen 2 och R_0) för att ta hand om olikheten (*), så har vi att

$$|f(x)-2| < \varepsilon \quad \text{så snart} \quad |x| > R.$$

Detta betyder att vi har verifierat att det aktuella gränsvärdet existerar och är lika med 2.

◇ ◇

Försök sedan göra samma sak med **övning 29 på sid 94.**

Kap 2

Kap 2

Vi börjar nu studera kap 2. Avsnitt 2.1 är en förberedelse för definitionen av derivata. Det handlar om hur en tangent till en kurva borde se ut. Läs igenom avsnittet och öva på **problem 7, 15, 21, 23 på sid 102.**

I avsnitt 2.2 kommer derivatan på allvar. De flesta exemplen handlar om funktioner som ni bör känna till. Man kan redan här notera *approximationsegenskapen:*

> Att f är deriverbar för $x = x_0$ är ekvivalent med följande: Det existerar ett tal A och en funktion $\rho(h)$ så att man har
>
> $$f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + h\rho(h) \quad \text{och} \quad 0 = \rho(0) = \lim_{h\to 0} \rho(h).$$

Talet A visar sig vara derivatan $f'(x_0)$. Termen $h\rho(h)$ är ”felet” då man approximerar $f(x_0+h)$ genom att gå längs tangentlinjen i stället för att gå längs grafen av f. Poängen med detta ”fel” är att det går mot 0 då $h \to 0$ snabbare än h självt. Detta uttrycker i formelspråk den geometriska innebörden av att en kurva har en tangent: linjen genom punkten $(x_0, f(x_0))$ med lutningen A är en ”bättre” approximation till kurvan än alla andra linjer.

Stycket ”Derivatives have the Intermediate-Value Property” kan ni hoppa över. Gör några **övningar på sid 110-111: 1-6, 43, 45.**

I avsnitt 2.3 har vi deriveringsreglerna för summa, produkt, kvot osv. Framför allt torde regeln för kvot vara ny för många av er. Läs igenom hela avsnittet och öva på (åtminstone) **övningarna 11, 13, 15, 19, 29 på sid 119.** Många av övningarna här bli kanske enklare när man har tillgång till den allmänna kedjeregeln, som kommer i nästa avsnitt.

Observera att det kan ofta vara en förenkling att skriva om en kvot till en produkt, som i följande exempel:

◇ ◇

Exempel. Bestäm derivatan av $f(x) = \dfrac{x^2-2}{(x+1)^4}$.

Lösning: Skriv $f(x) = (x^2-2)(x+1)^{-4}$, så ger regeln för derivering av en produkt att

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(x+1)^{-4} + (x^2-2)(-4)(x+1)^{-5} = (x+1)^{-5}\Big(2x(x+1) + (x^2-2)(-4)\Big) \\ &= \frac{2x^2+2x-4x^2+8}{(x+1)^5} = \frac{8+2x-2x^2}{(x+1)^5} \end{aligned}$$

◇ ◇

Avsnitt 2.4 om kedjeregeln ger grunden till derivering av alla mer komplicerade funktioner. Så snart en funktion är sammansatt av flera sådana ”inre funktioner” som man kan derivera, så kan man också derivera den sammansatta funktionen. Till en början kan det underlätta att införa hjälpbokstäver, som i **Ex 1-2**, men man lär sig snart att klara sig utan dem. Läs avsnittet noga, studera exemplen. En sammansatt funktion kan vara sammansatt i många steg efter varandra!

På sid 125 räknar ni övningarna 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 18, 22, 23, 25.

Avsnitt 2.5: Derivatorna av sin och cos har ni sett tidigare. Nu tillkommer tan och cot (medan sec och csc kan hoppas över). Observera att derivatorna av tan och cot kan skrivas på flera sätt:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, \quad \frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x.$$

Skumma igenom texten i avsnitt 2.5 och gör **övningarna 2, 3, 5, 7, 9, 13, 17, 21, 27, 29, 31, 47, 51 på sid 131f.**

I avsnitt 2.6 presenteras medelvärdessatsen. Det är den sats som gör derivatbegreppet användbart: den ligger bakom alla de välkända sambanden mellan derivatans tecken och funktionens växande osv.

I avsnitt 2.6 ska ni läsa allt utom sats 16. Man kan formulera sats 11 så att den gäller även om $b < a$:

Sats 11. Låt a och b vara två reella tal. Antag att f är deriverbar överallt mellan a och b och kontinuerlig på det slutna intervallet med ändpunkter a och b. Då finns ett tal c, som ligger mellan a och b, så att

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Beviset blir detsamma som i boken: om $b < a$ låter man bara a och b byta roller i resonemanget.

Satsen kan användas till undersökning av gränsvärden:

◇ ◇

Exempel. Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Lösning: Sätt $f(x) = \sqrt{1+x}$. Täljaren i uttrycket kan då skrivas som $f(x) - f(0)$. Vidare är $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$. Använd medelvärdessatsen med $a = 0$ och $b = x$, så blir

$$f(x) - f(0) = (x - 0)f'(c) = x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+c}},$$

där $c = c(x)$ ligger mellan 0 och x. Detta ger

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{1+c}} \to \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \text{ då } x \to 0 \text{ (ty då går även } c \to 0\text{).}$$

Vid själva gränsövergången använder vi kontinuiteten hos kvadratrotsfunktionen.

◇ ◇

Terminologin i definition 5 sid 135 är inte helt lyckad. Vi bör hålla oss till det normala uttryckssättet, som ser ut så här:

> Antag att f är definierad på ett intervall I, och att x_1 och x_2 är två punkter i I.
> (a) Om $f(x_2) > f(x_1)$ så snart $x_2 > x_1$, säger vi att f är **strängt växande** på I.
> (b) Om $f(x_2) < f(x_1)$ så snart $x_2 > x_1$, säger vi att f är **strängt avtagande** på I.
> (c) Om $f(x_2) \geq f(x_1)$ så snart $x_2 > x_1$, säger vi att f är **växande** på I.
> (d) Om $f(x_2) \leq f(x_1)$ så snart $x_2 > x_1$, säger vi att f är **avtagande** på I.

Observera att dessa ***definitioner*** *inte har ett skvatt att göra med derivatan av f. De handlar bara om att jämföra funktionsvärden i olika punkter!!!* Sats 12 handlar sedan om hur derivatan (när den existerar) kan användas för att undersöka om f är växande eller avtagande osv.

I sats 12 kan man skärpa resultatet något: om $f'(x) = 0$ i ändligt många punkter och $f'(x) > 0$ för övrigt, så är f fortfarande strängt växande. Ett exempel på detta är funktionen $f(x) = x^3$. Mostvarande gäller för strängt avtagande. Sats 13 är också viktig.

◇ ◇

Idéerna i detta avsnitt kan ofta användas när man vill bevisa *olikheter*. Vi tar ett exempel:

Exempel: Visa olikheten $\sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x$ för $0 < x < 1$.

Lösning: Sätt $f(x)$ = differensen mellan vänsterled och högerled i påståendet, dvs $f(x) = \sqrt{1-x} - 1 + \frac{1}{2}x$. Då är $f(0) = 0$. Vidare gäller

$$f'(x) = -\frac{1}{s\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2} = \frac{-1+\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}$$

För $0 < x < 1$ är ju $\sqrt{1-x}$ säkert ett tal som ligger i intervallet $0 < x < 1$ och av detta följer att $f'(x) < 0$ för $0 < x < 1$. Men det betyder att f är strängt avtagande i intervallet $0 \leq x \leq 1$, så att för $0 < x < 1$ gäller säkert $f(x) < f(0) = 0$. Men att $f(x) < 0$ är ekvivalent med det som skulle bevisas, och påståendet är alltså sant.

◇ ◇

Räkna **övningar på sid 139f.: nummer 2, 5, 6, 9, 11.**

Avsnitt 2.7 innehåller enkla tillämpningar av derivator. Den första ”Approximating small changes” är en direkt tillämpning av ”approximationsegenskapen” (inramad ovan i samband med avsnitt 2.2). Resten kan ni hoppa över just nu, det återkommer i kapitel 4. Gör **övning 7 och 8 på sid 145.**

Högre derivator i 2.8 är inte svårt. **Räkna övningarna 5, 9, 15, 19 på sid 150.**

Läs avsnitt 2.9 om implicit derivering. **Ex 1-5** visar olika aspekter av saken. **Ex 6** och ”The general power rule” är mindre viktiga. Lös **övningarna 3, 5, 9, 11 på sid 156.** Ta också gärna en titt på **övning 30**, som är en tankeställare.

Avsnitt 2.10 hoppar vi över just nu. Avsnitt 2.11 kan läsas av de som också tänker sig att läsa fysik/mekanik.

Kap 3

Kap 3

Nu är det dags att gå in i kapitel 3. Enligt rubriken handlar det om *transcendenta funktioner*. Detta är sådana funktioner som inte är bildade genom sammansättning av ändligt många operationer av typerna addition/subtraktion, multiplikation, division och potenser (med rationella exponenter). Några sådana funktioner har vi redan sett: de trigonometriska funktionerna. Men det finns många fler!

Avsnitt 3.1: Det viktigaste här är definition 2 och formeln för derivatan av en invers funktion. I princip bestämmer man den inversa funktionen till $y = f(x)$ genom att lösa ut x ur denna ekvation (och sedan ev. byta bokstäver. Men i realiteten är det långtifrån alltid som man verkligen *kan* lösa ekvationen). **Lämpliga övningar är 9, 11, 21, 25, 29 och 34, sid 181.**

Avsnitt 3.2: Det som står i detta avsnitt har ni kanske nosat på tidigare, men det behöver nog tas upp i alla fall. Vad gäller logaritmer, som brukar vara det som upplevs som allra svårast, ska ni komma ihåg att (nästan) allting finns gömt i den här formeln:

$$\log_a x = u \Leftrightarrow x = a^u,$$

som också kan skrivas

$$x = a^{\log_a x}$$

Med hjälp av denna kan man t ex bevisa logaritmlagen (vi) så här:

$$\text{Å ena sidan är } x = a^{\log_a x} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = b^{\log_b a \log_a x},$$
$$\text{och å andra sidan är } x = b^{\log_b x}$$

Jämför exponenterna i de båda högerleden, så följer

$$\log_b a \log_a x = \log_b x,$$

vilket är lagen (vi).

Ni bör arbeta er igenom alla **övningarna 1-18 och 29-30 på sid 185 f.**

Avsnitt 3.3: Här definieras den naturliga logaritmen och exponentialfunktionen på allvar. Läs igenom sid 186-191 och definition 7 på sid 192, med ambitionen att förstå de stora dragen i hur man steg för steg ”konstruerar” allt det som som i de tidigare studierna varit ganska odefinierat. Naturligtvis ska ni inte lägga alla smådetaljer på minnet. I **Ex 8-10** introduceras en användbar metod, logaritmisk derivering, som kan underlätta hanteringen av uttryck med komplicerade faktorer och komplicerade potensuttryck. Även på detta avsnitt bör ni göra många övningar – ln och e^x hör till matematikens viktigaste funktioner. **Sid 195: nummer 1-16, 19-28, 31, 35, 41, 49, 57, 59.**

Avsnitt 3.4: Här finns sats 5, fyra viktiga ”standardgränsvärden”. I sammanhanget kan det vara idé att göra en mer allmän jämförelse av hur fort olika funktioner växer då $x \to \infty$. Vi definierar symbolen $\prec$ genom att säga

$$f(x) \prec g(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Det kan utläsas ”$f(x)$ är svagare än $g(x)$”. I så fall kan man ställa upp t ex följande kedja:

$$\cdots \prec \ln\ln x \prec \ln x \prec x^\delta \prec x \prec x^{1000} \prec \cdots \prec e^{\delta x} \prec e^x \prec x^x \prec e^{x^2} \prec \cdots$$

Här står δ som en representant för ett godtyckligt tal mellan 0 och 1. Denna lista kan fortsättas godtyckligt långt åt både höger och vänster, och mellan två funktioner i listan kan man alltid interpolera ett godtyckligt antal nya funktioner.

Med hjälp av denna lista kan man beräkna gränsvärden, bl a som i följande exempel:

Exempel: Bestäm $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}+x^2-1}{2e^{2x}+x^{35}}$.

Lösning: När x är stort dominerar exponentialtermerna i både täljare och nämnare. Då bryter vi ut e^{2x} och förkortar

$$\frac{e^{2x}+x^2-1}{2e^{2x}+x^{35}} = \frac{e^{2x}\left(1+\frac{x^2}{e^{2x}}-\frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(2+\frac{x^{35}}{e^{2x}}\right)} = \frac{1+\frac{x^2}{e^{2x}}-\frac{1}{e^{2x}}}{2+\frac{x^{35}}{e^{2x}}} \longrightarrow \frac{1+0-0}{2+0} = \frac{1}{2} \quad \text{då } x \to \infty.$$

$\diamond \diamond$

Det som står om exponentiell tillväxt och avtagande bör dels inte vara helt obekant från tidigare, och dessutom kommer vi att ta detta senare i samband med en systematisk behandling av differentialekvationer. Men den som är intresserad av tillämpningar kan redan nu ta en titt på exemplen: biologi i **Ex 1**, fysik i **Ex 2-3** och ekonomi i avsnittet om "Interest" (dvs ränta).

I sats 6 sid 201 kommer ännu ett viktigt standardgränsvärde, som faktiskt är ett alternativt sätt att definiera exponentialfunktionen. Det ska ni lära er. Logistisk tillväxt är intressant för biologer.

Övningar på sid 203: 1-8, samt de av 9-20 som ni tycker verkar intressanta.

Avsnitt 3.5: Här har vi en hop alldeles nya funktioner, som det gäller att bli god vän med. Vi undviker skrivsätten $\sin^{-1}$ och skriver arcsin (osv.) i stället. Det räcker att man behärskar arcsin, arccos, och arctan (möjligen även arccot); arcsec och arccsc kan ni hoppa över alldeles. Jag föreslår följande formuleringar av definitionerna:

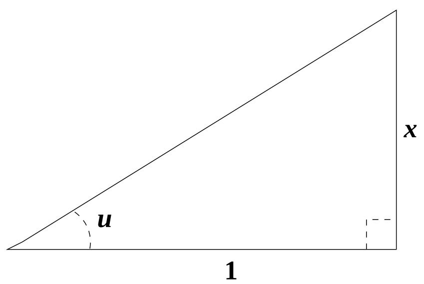
$$y = \arcsin x \iff \sin y = x \text{ och } -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$
$$y = \arccos x \iff \cos y = x \text{ och } 0 \le y \le \pi$$
$$y = \arctan x \iff \tan y = x \text{ och } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

Funktionen arccos använder man i geometrin när man beräknar vinkeln mellan två vektorer. Alla funktionerna dyker upp när vi kommer till integraler, därför att de har så enkla derivator. I praktiskt arbete med dem har man stor nytta av att rita rätvinkliga trianglar, exempelvis när man ska förvandla en av dem till någon annan. Vi kompletterar bokens exempel med ett par till:

$\diamond \diamond$

Exempel. Bevisa att $\arctan x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ för alla x.

lösning: Antag först att $x > 0$. Rita en figur som innehåller vinkeln $u = \arctan x$. Det blir en rätvinklig triangel med kateterna x och 1, som i figuren till höger. Pythagoras' sats ger hypotenusan lika med $\sqrt{x^2+1}$. Man ser att $\sin u = x/\sqrt{x^2+1}$, och eftersom uppenbarligen $0 < u < \pi/2$ måste då $u = \arcsin(x/\sqrt{x^2+1})$. Därmed är vi klara med fallet $x > 0$. Om $x = 0$ är båda sidor av påståendet lika med 0, så saken är klar då också. Om $x < 0$ sätt $y = -x$ och använd att både arcsin och arctan är udda funktioner. (Genomför detta!)



Exempel. Beräkna $\arctan 2 + \arctan 3$.

Lösning: Sätt $u = \arctan 2$, $v = \arctan 3$ och $w = u + v$. Då gäller (varför?)

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} < u < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{4} < v < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} \tan u = 2 \\ \tan v = 3 \end{cases}$$

Det följer att $\dfrac{\pi}{2} < w < \pi$. Vidare ger additionsformeln för tangens (Adams sid 50, längst ner):

$$\tan w = \tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = \frac{5}{-5} = -1$$

Det sökta talet är alltså det tal w i intervallet $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ för vilket $\tan w = -1$. Den sista ekvationen har lösningarna $w = -\frac{\pi}{4} + n\cdot\pi$, där n är ett godtyckligt heltal. Den enda lösningen i det rätta intervallet får man för $n = 1$. Detta ger:

Scar: $\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4}$.

◇ ◇

Övningar på sid 212-213: 1-12, 19, 21, 25, 27, 31. Fundera dessutom på följande problem:

1. Bestäm $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ för alla $x \neq 0$.
2. Beräkna $\arcsin \frac{99}{101} + 2\arctan \frac{1}{10}$.
3. Hur många lösningar har ekvationen $\arctan x = \frac{\pi}{4}$?

Avsnitt 3.6: De hyperboliska funktionerna är ”varianter” av exponentialfunktionen, som är eleganta att använda i vissa situationer. Ni ska kunna deras definition, men behöver inte fördjupa er i saken. De inversa hyperboliska funktionerna kan ni helt hoppa över. Gör **övning 2, sid 218** för skojs skull. Det *finns* ett samband mellan dessa funktioner och de trigonometriska; för att klargöra detta behövs komplexa tal.

Avsnitt 3.7 hoppar ni över nu. Det återkommer vi till i slutet av kursen.

Kap 3

Kap 4

Kapitel 4 tar upp en del tillämpningar av derivator. Avsnitt 4.1 innehåller några bra exempel. När man ska lösa problem om hastigheter av olika slag räcker det inte att bara studera en ”ögonblicksbild” av situationen. Man måste ”låta tiden gå” för att kunna dra några slutsatser. Studera **Ex 1-3** och **5. Övningar på sid 237: 1, 3, 11.**

Extremvärdesproblem, avsnitt 4.2 och 4.3 är de viktigaste avsnitten i kapitlet. Läs 4.3 t o m **Ex 4** sid 244. Återstoden av avsnittet är inte fullt så viktig. I **Ex 3** och **4** har Adams något som ska föreställa teckenstudietabeller för derivatan. De är tyvärr alldeles felkonstruerade. Det borde finnas en x-axel överst. Som det nu ser ut kan man i Ex 3 få intrycket att f' antar värdena -2, -1, 0, 1 och 2 i vissa punkter. dessa tal ska i själva verket föreställa x-värden. Så här borde tabellen i exemplet se ut:

	EP		CP		CP		CP		EP
x	-2		-1		0		1		2
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max

(Den översta raden med EP osv. är ganska onödig.) Motsvarande tabell i Ex 4 och senare i boken bör justeras på motsvarande sätt. (Ibland uppträder även s k singulära punkter, dvs punkter där derivatan inte existerar.)

Övningar på sid 246: 1–3, 7, 13, 14, 16, 18, 22, 29.

Avsnitt 4.3: Konkavitet och inflexionspunkter hör till den matematiska allmänbildningen, men är inte lika viktigt som max och min. Ofta blir andraderivatan så komplicerad, att undersökning av konkavitet kan vara svår att genomföra. Det är möjligt att teckenstudera f' och f'' i samma tabell. Så här skulle man kunna göra i **Ex 4**:

x		0		1		3/2	
f'	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$
	$\smile$	infl	$\frown$	infl	$\smile$		$\smile$

Övningar på sid 251: 9, 15.

I avsnitt 4.4 handlar det om hur man ritar lite krångligare kurvor.

För att finna *sneda* asymptoter kan man ibland skriva kurvans ekvation på formen

$$y = ax + b + E(x), \quad \text{där } E(x) \to 0 \text{ då } x \to \infty \text{ (eller } -\infty).$$

Detta ser man i **Ex 3-5.** En mer allmän metod består i att man först beräknar $a = \lim y/x$. Om detta existerar (ändligt), *kan* det finnas en asymptot med lutningen a. För att se om det verkligen är så, beräknar man också $b = \lim(y - ax)$. Om detta existerar (ändligt), har man verkligen asymptoten $y = ax + b$. Se följande exempel!

◇ ◇

Exempel. Bestäm eventuella sneda asymptoter till kurvan $y = \sqrt{4x^2 + x}$.

Lösning: Först tar vi $x > 0$. Det gäller

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{4x^2 + x}}{x} = \sqrt{4 + \frac{1}{x}} \to 2 \text{ då } x \to +\infty.$$

Detta visar att om det finns en sned asymptot åt höger, så måste den ha lutningen 2. För att avgöra om asymptoten verkligen existerar, undersöker vi

$$\begin{aligned} y - 2x &= \sqrt{4x^2 + x} - 2x = \frac{(4x^2 + x) - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 2x}} = \frac{x}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x} \\ &= \frac{x}{x\big(\sqrt{4 + (1/x)} + 2\big)} = \frac{1}{\sqrt{4 + (1/x)} + 2} \to \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4} \text{ då } x \to +\infty. \end{aligned}$$

Detta visar att linjen $y = 2x + \dfrac{1}{4}$ är asymptot åt höger. På liknande sätt kan man visa att linjen $y = -2x - \dfrac{1}{4}$ är asymptot åt vänster. Genomför detta! (Det kan vara lämpligt att sätta $x = -t$ och låta $t \to +\infty$ i stället för $x \to -\infty$ vid gränsvärdesberäkningarna!)

◇ ◇

Andraderivatan är inte alltid nödvändig att beräkna. Man kommer långt med förstaderivatan och teckenstudium av den.

Gör **övningar på sid 262: 7, 11, 13, 17, 19, 30, 31, 37.**

Avsnitt 4.5: Exemplen på ”tillämpade problem” i 4.5 är bra. Det tonade avsnittet på sid 264–265 är värt att studera noga. Det kan generaliseras till ett principprogram för allmän problemlösning i följande stil:

LÖSNING AV TILLÄMPADE PROBLEM

1. Läs igenom problemet noga, gärna flera gånger, för att få en klar bild av vad man känner till och vad som är sökt..
2. Rita (om möjligt) en figur.
3. Inför beteckningar för alla relevanta storheter. En del av storheterna är variabla, andra kan vara konstanta. *Många gånger är det bättre att att beteckna även de konstanta med bokstäver, eftersom lösningen då blir lättare att förstå, än om man sätter in siffervärden på ett alltför tidigt stadium.*
4. Skriv upp de *samband* som råder mellan införda storheter. Detta innebär att man gör en *matematisk modell* av situationen.
5. Formulera det givna problemet matematiskt. (Det kan vara som ett extremvärdesproblem, eller som en differentialekvation eller som något annat.)
6. Lös det matematiska problemet.
7. *Tolka* den erhållna lösningen, dvs återvänd till problemets ursprungliga formulering och formulera ett *svar*.
8. Tänk efter om svaret är *rimligt*: stämmer det med vad sunda förnuftet och erfarenheten säger?

Övningar på sid 269f: 1, 6, 7, 11, 15, 24, 27, 39.

Avsnitt 4.6 hoppar vi över. Den som är intresserad av numeriska aspekter kan läsa det kursivt. Newtons metod och s k fixpunkt-iteration har många intressanta tillämpningar.

I avsnitt 4.7 kommer Adams in på den approximationsegenskap som vi har nämnt redan tidigare. Den s k *lineariseringen av f omkring en punkt $x = a$* är den approximation av f som geometriskt betyder att grafen av f ersätts med sin tangent i punkten. Om man är nära punkten a kan denna enkla approximation vara mycket användbar. Läs texten t o m **Ex 3**. Resten av avsnittet kan hoppas över just nu. Räkna några **problem på sid 284: nummer 3, 7, 11**.

Avsnitt 4.8 handlar om en sorts fortsättning av idén i 4.7. Att approximera med en rät linje är ju detsamma som att approximera med ett polynom av första graden. Nu vill vi göra förbättrade approximationer i närheten av en punkt $x = a$ genom att använda polynom $P_n(x)$ av grad n. Det visar sig att om man ser till att $P_n(x)$ har samma värde som $f(x)$ i punkten a och motsvarande gäller för derivatorna upp till och med ordning n, så får man ett entydigt bestämt polynom som approximerar f på ett mycket bra sätt just i närheten av punkten a. Läs texten fram t o m formuleringen av sats 10. Beviset kan ni hoppa över – vi kommer att ge ett annat bevis för satsen senare i kursen. I **Ex 3-4** ser man hur Taylors formel kan användas för numerisk approximation. För våra tillämpningar kommer det nästan alltid att räcka med den version av resttermen (”feluppskattning”) som kommer efter definition 9. Sats 11 (den s k entydighetssatsen för Taylor-polynom) är också praktisk: den säger att om man har hittat ett polynom som approximerar lika bra som ett Taylor-polynom, så måste det faktiskt vara Taylor-polynomet. Detta används i **Ex 5-6**.

Observera hur O-symbolen fungerar. Här är några exempel på hur man kan räkna med den:

$$O(x^3)+O(x^3)=O(x^3), \quad O(x^3)+O(x^4)=O(x^3),$$
$$O(x^5)-O(x^5)=O(x^5), \quad x^3O(x^4)=O(x^7).$$

Några Taylor-polynom som ideligen används kan vara bra att lära sig redan nu. De finns i tabellen på sid 286. Vi ger (med viss modifiering) listan här:

$$\boxed{\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+O(x^{n+1})\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+O(x^{2n+1})\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+O(x^{2n+2})\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+O(x^{n+1})\\
\arctan x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+O(x^{2n+1})\\
(1+x)^\alpha &= 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+O(x^{n+1})
\end{aligned}}$$

I avsnitt 4.9 beräknas vissa typer av gränsvärden. Kom också ihåg följande standardgränsvärden, som kan göra det hela lite snabbare i vissa fall:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Om man ska undersöka ett gränsvärde då $x\to a$, kan det ofta vara lämpligt att byta variabel och sätta $t=x-a$ (dvs $x=a+t$). Att $x\to a$ är då detsamma som att $t\to 0$, vilket ofta är en enklare situation att hantera (inte minst därför att Taylor-polynomen ovan är just approximationer kring 0. De kallas då ofta *MacLaurin-polynom*).

◇ ◇

Exempel 1. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}=?$

$$\frac{\tan 3x}{x}=\frac{\sin 3x}{x\cos 3x}=\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{\cos 3x}\to 1\cdot\frac{3}{1}=3.$$

Exempel 2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-\cos x}{x^2}=?$

Här använder vi Taylor-utveckling.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+O(x^3) \quad \text{och} \quad \cos x=1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)$$

ger vid insättning i det givna uttrycket

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - \cos x}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) - x - 1 + \frac{x^2}{2} - O(x^4)}{x^2}$$
$$= \frac{x^2 + O(x^3) - O(x^4)}{x^2} = 1 + O(x) \to 1.$$

◇ ◇

Studera också bokens **Ex 1-2**. Ytterligare exempel kommer att ges under kursens gång.

Adams tar upp ett par satser, Th 12 och 13, som kallas l'Hôpitals regler. *Dessa är onödiga att lära sig. Nästan allt som kan göras med dem, kan också göras med Taylors formel, på ett mer systematiskt sätt och med mindre risk för att göra fel.* Här ger vi några exempel på detta som kan ersätta bokens lösningar av vissa av **Ex 5-8**. (**Ex 9** kan ni hoppa över.)

◇ ◇

Example 5. (a) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)-}\frac{2x-\pi}{\cos^2 x}$.

Lösning: Sätt $x - \dfrac{\pi}{2} = t$, så ska $t \to 0-$. Nämnaren blir $\cos^2(t+\pi/2) = \cos^2(\pi/2 - (-t)) = \sin^2(-t) = \sin^2 t$, och vi får

$$\frac{2x-\pi}{\cos^2 x} = \frac{2t}{\sin^2 t} = \frac{t}{\sin t}\cdot\frac{2}{\sin t}.$$

Första faktorn går mot 1 (standardgränsvärde) och den andra mot $-\infty$, vilket ger samma resultat som i Adams.

Example 6. Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$.

Lösning: Vi skriver om uttrycket genom att sätta på gemensamt bråkstreck och Taylor-utveckla:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x\sin x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) - x}{x(x + O(x^3))} = \frac{x^3(-\frac{1}{6} + O(x^2))}{x^2(1 + O(x^2))}$$
$$= x\cdot\frac{-\frac{1}{6} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \to 0\cdot\frac{-1/6}{1} = 0.$$

då $x \to 0+$ (eller, för den delen, då $x \to 0$ överhuvudtaget).

Example 7 ska överhuvudtaget inte göras med l'Hôpital, eftersom de är kända standardgränsvärden. **Example 8** kan göras som i Adams eller direkt så här:

$$x^x = e^{x\ln x} \to e^0 = 1 \text{ då } x \to 0+ .$$

Här används att exponentialfunktionen är kontinuerlig.

Övningar sid 298: 1, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19.

Kap 5

Kap 5

Vi ska nu ta itu med motsatsen till derivering: integration. Under denna rubrik sammanfattar man två olika, men besläktade, problem. Det första introduceras i avsnitt 2.10 i Adams. Definition 7 är viktig och vi formulerar den på svenska:

> Låt f vara en funktion definierad på ett intervall I. En annan funktion F kallas *antiderivata* eller *primitiv funktion till f på I*, om $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in I$.

Observera att begreppet antiderivata är knutet inte bara till funktionen f utan också till intervallet I. En förklaring till att detta är lämpligt finns i sats 13 sid 137, som inte är sann om man har en annan definitionsmängd. Se kommentaren efter **Ex 1** sid 157.

Ex 1-4 bör ni studera. Av de tonade formlerna på sid 158 kan ni hoppa över (k) och (l), kanske också (j). De andra är sådana som ni ska känna till.

Slutet av avsnittet, om differentialekvationer och begynnelsevärdesproblem, spar vi till senare. **Öva på sid 162, nummer 1-14.** Kom ihåg att kontrollera era svar genom att ”derivera tillbaka”!

Sedan hoppar ni till kapitel 5. Avsnitt 5.1 om summabeteckningen bör ni ha sett i algebran. Om ni känner er osäkra på saken, kan det vara lämpligt att göra några av övningarna på sid 307.

I 5.2 diskuteras begreppet area. På sid 309 räknas upp fem egenskaper som ett vettigt areabegrepp bör ha, och sedan diskuteras hur man ska ”förverkliga” detta så att man kan tala om arean av först polygonområden och sedan områden med krökta kurvor som rand. (Jfr Archimedes’ mätning av cirkeln sid 60–61!) Exemplen på sid 311-314 är inte särskilt nödvändiga att ta sig igenom. Det räcker att konstatera att man *kan* beräkna vissa areor genom approximation med rektanglar och fiffigt räknande – i senare avsnitt får vi mer kraftfulla metoder för detta.

Definitionen av integral i avsnitt 5.3 är principiellt viktig, men man ska inte (på det här stadiet) gräva ner sig i detaljer. De stora dragen är dessa:

---

1. Dela in intervallet $[a,b]$ i småintervall.
2. Approximera f uppifrån och nedifrån med funktioner som är konstanta på varje småintervall, dvs approximera området mellan grafen av f och x-axeln uppifrån och nedifrån med rektanglar.
3. Om det går att göra differensen mellan dessa approximationer godtyckligt liten genom att man gör indelningen av intervallet tillräckligt fin, finns det exakt ett tal I som är $\leq$ alla ”översummor” och $\geq$ alla ”undersummor”. Då säger vi att f är integrerbar över $[a,b]$ och talet I kallas integralen av f över $[a,b]$:
$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Om f är integrerbar, kan man beräkna I genom att genomföra approximationer för en följd av indelningar som blir allt finare; detta demonstreras i **Ex 2-3**. Man kan också approximera med allmänna Riemannsummor, som det talas om på sid 319. Men för det mesta beräknar man integraler med helt annan teknik, som kommer i de följande avsnitten.

Att en kontinuerlig funktion är integrerbar (Theorem 2) får vi acceptera utan bevis. Däremot är det lätt att bevisa att t ex en *växande* funktion är integrerbar – se övning 17 sid 321.

Ibland kan man känna igen en *summa* som en Riemannsumma för en integral. I **Ex 4** har vi ett sådant exempel. **Gör övning 11 och 13 på sid 321**. I avsnitt 5.4 har vi ett antal räkneregler för integraler. Notera de genvägar som kan finnas, t ex om man kan tolka integralen som en area som man lätt beräknar med elementära metoder. **Ex 1** visar några sådana fall. Notera särskilt att om f är en *udda* funktion och intervallet är symmetriskt omkring 0, så blir integralen noll.

Medelvärdessatsen är viktig, liksom definitionen av medelvärdet av en funktion över ett intervall. Definition 5 är ganska självklar.

Övningar på sid 323: 1, 3, 5, 7, 10, 11, 13. Alla dessa (utom den första) ska kunna beräknas med användning av symmetrier och kända areor!

Någon har sagt att ”*derivering är ett räknesätt, men integration är en konst*”. Dvs att derivera är något som man så småningom gör rutinmässigt, men att integrera kräver mycket mer. Det finns till synes enkla integraler, som helt enkelt är omöjliga att beräkna med s k elementära metoder (vilket är de enda metoder vi tar upp i denna kurs). Exempel på sådana integraler är

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \quad \int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

För att beräkna till synes väldigt lika integraler krävs dessutom ofta vitt skilda metoder. Jämför t ex hur man beräknar

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx \quad \text{och} \quad \int \sin^2 x \cos^3 x\,dx.$$

(behandlas på sid 339-340).

I avsnitt 5.5 finns *Analysens huvudsats*, som knyter ihop antiderivator och integraler. Notera att satsen består av två delar: den första handlar om derivatan av en integral, den andra om integralen av en derivata. Studera alla exemplen i avsnittet och **räkna övningarna 1, 3, 5, 6, 9, 13, 15, 25, 33, 37, 41, 51 på sid 333**.

Vi ska nu titta på lite mer avancerade metoder för integration. Substitution eller *variabelbyte* behandlas i 5.6. För att man ska bli en bra integrerare gäller det att lära sig att se vilket (eller vilka) variabelbyte(n) som kan fungera för en given integral. Det bästa sättet att lära sig detta är genom erfarenhet, dvs genom att räkna många exempel (detta gäller nästan all matematik/inlärning). Listan på sid 334 är kanske lite onödigt omfattande. Nummer 1-6 är ju bara specialfall av nummer 7. Av de följande behöver ni inte lära er utantill nummer 13, 14 och 18-20. Däremot borde listan utökas med den mycket användbara formeln

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C. \tag{*}$$

Läs, med papper och penna redo för eventuella kontrollberäkningar, **Ex 1-4**. När man räknar bestämda integraler skall gränserna justeras på det naturliga sättet: se **Ex 5-6**. Trigonometriska uttryck kommer sedan. Integralerna av tan och cot kan ses som fall av (*), de båda övriga i rutan på sid 334 kan ni hoppa över. Läs **Ex 7-9**, men skippa **Ex 10**.

När ni räknar obestämda integraler på sid 341–342, kom ihåg det som står i inledningen till dessa övningar: Ett svar kan se ut på annat sätt än i facit, men ändå vara rätt. (Och ett ganska säkert sätt att kontrollera sig själv är att kontrollderivera det svar man har fått, förutsatt att man deriverar rätt!) **Gör ett rejält urval av övningarna, t ex 1-9, 11, 14, 16-18, 23, 26, 39, 43, 46**.

I avsnitt 5.7 tillämpas integraler på areaberäkningar. Studera exemplen. Notera att man ofta måste göra en del förarbete innan man sätter upp en integral, för att veta vilka gränser som gäller osv. **Gör övningarna 5, 9, 13, 17, 25 på sid 346**.

Kap 6

Kap 6

Kapitel 6 tar upp flera integrationstekniker. Avsnitt 6.1-3 måste ni arbeta mycket med. Fortsatta studier i matematik, bl a lösandet av differentialekvationer som vi ska titta på senare, bygger i hög grad på förmågan att kunna integrera många funktioner.

”Integration by parts” kallas på svenska *partiell integration*. Denna idé kan vara användbar om integranden består av två faktorer (eller ibland bara en faktor), där den ena blir ”enklare” av att deriveras (eller ev integreras) och den andra i varje fall inte blir ”svårare” av att integreras (resp deriveras). **Ex 1** och **2** innehåller ett antal bra exempel. Hoppa över **Ex 3**. I **Ex 4** har ni ett mer intrikat fall. I **Ex 5** visas hur man kan sätta in integrationsgränser allteftersom man räknar på. Avsnittet om reduktionsformler kan ni läsa igenom, men ägna inte alltför mycket tid åt det.

Övningar på sid 355: 1, 3, 5, 9, 13, 19, 21.

I avsnitt 6.2 kommer fler variabelbyten. Substitution med arcsin, **Ex 1-2**, bör man känna till. **Ex 3** och **4** är mindre viktiga. Att komplettera kvadrater, som i **Ex 5**, har man ofta nytta av.

Om en integral innehåller uttryck av formen $\sqrt{ax+b}$ lönar det sig att försöka med att sätta $u=\sqrt{ax+b}$: **Ex 6**. Liknande idéer används i **Ex 7-8**. Variabelbytet $x=\tan(\theta/2)$, som avslutar avsnittet, är däremot mindre användbart i praktiken, eftersom det oftast leder till mycket komplicerade integraler.

Till bokens förslag på variabelbyten kan man lägga ett par till: Om en integrand kan skrivas $F(e^{ax})$, kan det vara en god idé att försöka med $u=e^{ax}$. Och om $\ln x$ ingår i integranden kan det löna sig att sätta $u=\ln x$. Vi demonstrerar detta:

◇ ◇

Exempel 1. Bestäm $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx.$

Lösning: Sätt $u=e^x$. Då är $du=e^x\,dx=u\,dx$, dvs $dx=du/u$. Man får

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx=\int \frac{u-1}{u+1}\,\frac{du}{u}=\int \frac{u-1}{u(u+1)}\,du,$$

som kan beäknas genom partialbråksuppdelning osv. (se avnitt 6.3). Genomför beräkningen! Kontrollera svaret genom att derivera!

Exempel 2. Bestäm $\displaystyle\int \frac{\cos\ln x}{x}\,dx.$

Lösning: Sätt $u=\ln x$, så blir $du=dx/x$ osv. Gör färdigt, kontrollera!

◇ ◇

Öva på sid 363: 1, 2, 3, 17, 29, 33, 35.

I avsnitt 6.3 ges en systematisk metod för att integrera rationella funktioner. Det viktigaste, och svåraste, momentet är *partialbråksuppdelning*, som sammanfattas i Theorem 1 sid 371. Vi redovisar här hela metoden på svenska:

För att kunna integrera $f(x)=P(x)/Q(x)$, gör följande:

1. Utför eventuellt divisionen; sedan återstår att behandla fallet då gradtalet av P är mindre än gradtalet av Q.

2. Faktorisera $Q(x)$ i reellt irreducibla faktorer. (Detta kan i praktiken vara ett mycket svårt moment.)

3. Ansätt partialbråk efter följande regler:

   a) En enkel faktor $x-a$ ger en term av formen $A/(x-a)$.

   b) En multipel faktor $(x-a)^n$ ger termer av formen
   $$\frac{A_n}{(x-a)^n}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}.$$

   c) En enkel faktor av formen x^2+ax+b ger en tem av formen $(Ax+B)/(x^2+ax+b)$.

   d) En multipel faktor $(x^2+ax+b)^n$ ger termer av formen
   $$\frac{A_n+B_n}{(x^2+ax+b)^n}+\cdots+\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b}.$$

4. Multiplicera med nämnaren, förenkla, identifiera koefficienter osv.

sedan kan termer av typerna a-c integreras, medan fall d hänvisas till formelsamlingar och sådant.

Läs bokens **Ex 1** och **2**. Av de tonade formlerna på sid 365 är det angeläget att kunna dem som har x^2+1 i nämnarna; de övriga kan klaras med lämpliga omskrivningar och partialbråksuppdelning. **Ex 3-8** visar upp olika saker som kan inträffa. **Räkna övningarna 1, 5, 9, 11, 13, 21, 25 på sid 372**.

När ni har kommit så här långt, har ni stött på alla de vanliga metoderna för ”elementär” integration. Det är då lämpligt att bläddra fram till **sid 404**, där man finner en samling blandade integraler. Här får man ingen ledning till vilken metod som ska användas genom att problemet står efter ett visst avsnitt, utan nu gäller det att själv välja integrationsmetod! **Gör så många av dem som ni orkar!** Några kan vara ganska svåra. Om ni har möjlighet att diskutera med kurskamrater så är detta en mycket fruktbar arbetsform. Observera också sammanfattningen av integrationsmetoder nere på sid 402.

Avsnitt 6.4 handlar om hur man använder hjälpmedel (datorprogram och formelsamlingar) för att beräkna integraler. Om ni har tillgång till t ex MAPLE eller Derive, kan ni gärna pröva och se hur dessa program klarar av att beräkna olika integraler.

Avsnitt 6.5. Generaliserade integraler är den svenska terminologin. Definitionerna 1 och 2 är ganska naturliga. **Ex 1-6** är typiska. Av Theorem 2 skall man känna till för vilka värden på p som integralerna är konvergenta, däremot är det onödigt att lära sig integralernas värden. Sats 3, jämförelsesatsen eller *jämförelsekriteriet*, används för att undersöka konvergens av integraler utan att man behöver kunna beräkna deras värden. Se **Ex 8-9. Räkna övningarna 1, 3, 5, 15, 17, 19, 31, 34, 37 på sid 384**.

Återstoden av kapitel 6 ingår inte i kursen.

Kap 7

Kap 7

Kapitel 7 handlar om olika användningar av integraler. Det är en vanlig missuppfattning att integral alltid måste betyda en area. Så är det inte alls. Den kan också betyda en volym, en massa, ett arbete, ett tröghetsmoment och en massa annat.

Avsnitt 7.1. Rotationsvolym bör vara känt från gymnasiet. Den allmänna idén för volymsberäkning presenteras med början på sid 408, och det speciella fallet med rotationskroppar följer efter. Metoden med cylindriska skal bygger på en annan idé. *Det rätta sättet att komma ihåg den här sortens formler är att förstå idén eller metoden, och vid behov rekonstruera formeln.* (Detta gäller för de flesta formler i matematiken. Trigonometriska formler bör man dock kunna utntill, åtminstone de enklaste.) Läs exemplen och räkna t ex **övningarna 5, 7, 19, 21 på sid 416**.

Avsnitt 7.2. Här finns fler exempel på skivmetoden. **Ex 1** och **2** är bra. **Ex 3** är knepigare – läs det gärna, men fastna inte i det om det känns svårt. (Mer praktiska metoder att hantera komplicerade kroppars volymer ges i kursen i flerdimensionell analys.) **Övningar på sid 419-420: nummer 11, 15**. Försök alltid att rita en figur till övningarna. En del kroppar som beskrivs där kan vara ganska komplicerade, men man kan (och behöver) i hög grad öva upp sitt rumsseende.

Avsnitt 7.3. Båglängd av en kurva beskriven på formen $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Härledningen behöver inte kommas ihåg i den ”strikta” versionen som inleder avsnittet, utan kom ihåg ”Leibniz-resonemanget” nere på sid 423. Ex. 1–4 visar att båglängden i praktiken ofta är svår att beräkna exakt. Vi hoppar över rotationsarea på sid 426 f. (även om det inte är särskilt svårt). **Övningar 1, 3, 7, 13 på sid 428f**.

Återstoden av kapitel 7 ingår inte i kursen. Men den som är intresserad av fysik kan gärna titta på 7.4-6, i 7.7 finns ett par tillämpningar på ekonomi och ekologi, och i 7.8 finns grunderna till sannolikhetskalkylen. Avsnitt 7.9 kommer vi att ta upp senare, i samband med differentialekvationer.

Kap 8

Kap 8

Kapitel 8, om kurvor, ska ni också läsa i urval. I 8.1 finns en del allmänbildande fakta om *kägelsnitten* eller de *koniska sektionerna*. Ni ska åtminstone veta vilken som är vilken av ellips, para′bel och hyper′bel, och vilken typ av ekvation som beskriver dem i standardläge i koordinatsystemet. De optiska egenskaperna tillhör också bildningen, liksom begreppen brännpunkt och halvaxel. Det som börjar längst ner på sid 485 kan ni hoppa över, det ingår i kurser i linjär algebra.

Observera vad kurvorna heter på svenska. *INTE ”parabol” eller ”hyperbol” – dessa ord betyder helt andra saker!!*

Gör några övningar på sid 487–488: nummer 7, 9, 11, 13, 15.

Avsnitt 8.2. Här introduceras parameterbeskrivning av kurvor. Eftersom ni vet vad en vektor är, kan ni gärna skriva det hela på vektorform. Den vanliga bokstaven för en *ortsvektor*, som utgår från origo och pekar på en punkt (x, y) är $\mathbf{r}$. I **Ex 1** kan man alltså beskriva kurvan som

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (t^2 - 1, t + 1), \ -\infty < t < \infty.$$

Läs **Ex 1-4**. **Ex 5** är mindre nödvändigt. **Ex 6** visar på att en kurva kan beskrivas med många olika parametriseringar. Läs också **Ex 7-8**. **Övningar på sid 494 f: 1, 5**.

Avsnitt 8.3. Detta avsnitt är egentligen ganska onödigt, om man aväner vektorbeteckningar. I stället för ”lutning” (slope) studerar man tangentriktning. Om en kurva beskrivs av vektorfunktionen $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ så är derivatan $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$ i varje punkt där den är skild från $\mathbf{0}$ (nollvektorn) en tangentvektor till kurvan. En kurva kallas *slät* ("smooth") där $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$. Genom att använda detta kan man lösa **övningarna 3, 7, 13, 17 på sid 499–500**.

Avsnitt 8.4. Båglängd av en parameterbeskriven kurva ges av en formel som blir mycket naturlig om man tänker fysikaliskt. Om $\mathbf{r}(t)$ beskriver läget av en partikel vid tiden t, kan $\mathbf{r}'(t)$ uppfattas som *hastighetsvektorn* och dess belopp $|\mathbf{r}'(t)|$ är *farten*. Under tidsintervallet $a \leq t \leq b$ förflyttas partikeln en sträcka s, som approximeras av förflyttningarna under en massa delintervall:

$$s \approx \sum_{k=1}^{n} |\mathbf{r}'(t_k)| \Delta t_k.$$

Högerledet är Riemannsumma till integralen som tas som definition av båglängden:

$$s = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Läs **Ex 1** och skriv om det med vektorbeteckningar! Resten av avsnittet hoppar ni över. **Övningar på sid 504: 1, 3, 5**.

Avsnitt 8.5. Polära koordinater. En kurva beskriven av en polär ekvation $r = f(\theta)$ kan direkt skrivas om till parameterform genom

$$\mathbf{r}(t) = f(t)(\cos t, \sin t) = (f(t)\cos t, f(t)\sin t),$$

där $t = \theta$. Det är därför onödigt att lära sig de speciella formlerna för tangentriktning, båglängd och annat som finns för "polära kurvor". Det mest intressanta i avsnittet är kanske just nu några exempel på kurvor: cardioiden i **Ex 4**, spiralkurvorna på sid 509. När man löser Newtons ekvationer för planetrörelse får man resultatet enklast på polär form. Detta motiverar intresset för "Polar Conics" i slutet av avsnittet. Träna lite på polära koordinater genom att göra **övningarna 3, 9, 13, 19 på sid 511 och 12-14 på sid 515**.

Kap 9

Kap 9

Vi ska nu titta på kapitel 9. Rubriken är "Följder och serier".

Avsnitt 9.1. En *talföljd* är, informellt, en följd av tal som man räknar upp i en bestämd ordning

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Mer formellt kan en talföljd uppfattas som en funktion definierad på de positiva heltalen $n \mapsto a_n$. I definition 1 på sid 520 finns en massa terminologi, som beskriver olika egenskaper som en talföljd kan ha. Observera också det uttryckssätt som införs på nästa sida: *ultimately decreasing* (etc.), på svenska *så småningom avtagande* (osv.). Konvergensdefinitionen är en version av samma gränsvärdesdefinition som ni redan sett i kapitel 1. Räknereglerna på färgad bakgrund sid 523 är också versioner av motsvarande räkneregler för funktioner av en kontinuerlig variabel.

Läs **Ex 1-6**. **Ex 7** bör göras på annat sätt:

◇ ◇

Example 7. Beräkna $\lim_{n\to\infty} n \arctan \frac{1}{n}$.

Lösning: När n är stort är $1/n$ nära 0. Vi kan då använda Taylor-approximationen $\arctan x = x + O(x^3)$ och får

$$n \arctan \frac{1}{n} = n\Big(\frac{1}{n} + O\big(\frac{1}{n^3}\big)\Big) = 1 + O\big(\frac{1}{n^2}\big) \to 1 \text{ då } n \to \infty.$$

◇ ◇

Sats 1 är kanske inte så märkvärdig, men resultatet längst ner på sid 524 är *mycket betydelsfullt* (märkligt nog har det inte fått rubriken Theorem, vilket det borde ha). Allt som står på sid 525-526 är läsvärt. **Övningar på sid 526f: nummer 1, 5, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 25, 27, 31**. Rätt många av dessa övningar kan uppfattas som repetition av saker som gjordes redan i kapitel 1.

Vi har nu gått igenom alla metoder för beräkning av gränsvärden, som ingår i kursen. Det kan vara lämpligt med en sammanfattning. Vi använder den *bokstavskonvention* som säger att bokstäver i stil med n, m, k och liknande betyder *heltal*, så att det handlar om talföljder; medan x, y, t o dyl står för kontinuerliga *reella* variabler.

Allmänna idéer.

1. Försök med ”direkt insättning” (om uttrycket är kontinuerligt). Om det blir ett obestämt uttryck av typ $0/0$, ∞/∞, $\infty - \infty$, 1^∞, ∞^0 etc., fortsätt med t ex
2. Bryt ut dominerande storleksordningar och förkorta (om det är ett bråk).
3. Om $x \to a$, substituera $x = a + t$; om $x \to -\infty$, sätt $x = -t$.
4. Instängningssatsen, om det går att uppskatta uttrycket uppåt och nedåt.
5. Medelvärdessatsen och Taylor-utveckling.

Standardgränsvärden.

Då $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{b^x} = 0\,(b > 1). \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0\,(a > 0). \quad \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}. \quad \lim_{x\to\infty} \Big(1 + \frac{a}{x}\Big)^x = e^a.$$

Då $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\,(a > 0). \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Då $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0\,(a > 0)$$

Avsnitt 9.2. En *serie* är ett försök att addera oändligt måmga tal. Det är *inte detsamma* som en talföljd. I en serie ska talen *adderas*, i en talföljd räknas de bara upp. Ett bättre namn i stället för serie vore *generaliserad summa*, analogt med generaliserad integral. Men det går knappast att ändra på ett månghundraårigt matematikerbruk . . .

Nu gäller det verkligen att ni förstår hur summasymbolen $\sum$ fungerar. Ett exempel: följande två uttryck är faktiskt precis samma sak:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k} \quad \text{och} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - k}.$$

Ty den vänstra av dem kan uttydas så här:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots,$$

och den högra så här:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \cdots.$$

Om man har svårt att förstå en likhet mellan två summor kan det ofta underlätta att på det här sättet skriva ut några termer i början av serien.

Läs in texten i 9.2, med definitioner och exempel. Den geometriska serien hör till allmänbildningen, inklusive formeln för summan när den är konvergent. **Ex 3** är kanske lite mer kuriöst än de övriga. En mycket viktig sats är Theorem 4. Den borde egentligen formuleras så här:

Sats 4. Om a_n inte går mot 0 då $n \to \infty$, så är serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Detta är nämligen det enda sätt som resultatet kan användas i praktiken. Som påpekas i texten efter satsen kan det mycket väl vara så att $a_n \to 0$ men likafullt $\sum a_n$ är divergent. De avslutande satserna 5-7 är enkla men viktiga. Man använder dem ideligen när man undersöker seriers konvergens. **Övningar på sid 534 f.: 1, 5, 7, 16**.

Avsnitt 9.3. Här finns ett antal "kriterier" som kan användas för att avgöra om en *positiv* serie (dvs en serie med icke-negativa termer) är konvergent eller divergent. Att bestämma *summan* av en konvergent serie är i allmänhet ett mycket svårt problem som man ofta får avstå från att lösa (eller göra en numerisk approximation). Integralkriteriet används främst för att avgöra konvergensen hos den s k p-serien:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ konvergerar } \iff p > 1,$$

och den serie som står i **Ex 2**. Dessa bör man komma ihåg som standardserier som man jämför andra serier med. Och detta gör man vanligen med hjälp av någon version av jämförelsekriterierna (Theorem 9 och 10). **Ex 3–5** visar hur det kan gå till. Rot- och kvotkriterierna i slutet av avsnittet är mer sällan användbara. De innebär i själva verket jämförelse med geometriska serier, och för att de ska ge besked måste termerna vara endera mycket snabbt avtagande eller snabbt växande. **Gör övningarna 1–12, 15–26 på sid 545, åtminstone dem med udda nummer**.

Avsnitt 9.4. Här studeras serier med termer av varierande tecken. En sådan serie kan transformeras till en positiv serie genom att man sätter belopp på alla termerna. Om den serie man då får är konvergent, så är även den ursprungliga serien konvergent (Theorem 13). I detta fall säger man att den ursprungliga serien är *absolutkonvergent*. Men det finns också serier som konvergerar utan att vara absolutkonvergenta; de säges vara *betingat* eller *villkorligt konvergenta*. Förklaringen till denna terminologi är att sådana serier har en karaktär av "obestämt uttryck" av formen $\infty - \infty$. Se "Rearranging ..." på sid 551-552.

För att undersöka absolutkonvergens kan man använda alla metoderna från avsnitt 9.3. För betingad konvergens har vi bara en metod i kursen, som ges av Theorem 14 (som ibland kallas Leibniz' sats). Läs **Ex 1** och **3-6. Lös övningarna 1, 3, 5, 7, 11, 17 på sid 553**.

Avsnitt 9.5-7 ingår inte i kursen. I avsnitt 9.8 återkommer vi till Taylors formel, om så bara för att göra ett bevis för satsen.

Ordinära differentialekvationer

ODE

Nu ska det handla om ordinära differentialekvationer, ODE. I kursen ingår tre enkla men viktiga typer av sådana: *separabla, linjära av första ordningen* och *linjära av andra ordningen med konstanta koefficienter*. I Adams finns de behandlade på flera olika ställen i boken, men vi tar alla i ett sammanhang. Några övergripande saker finns i Appendix IV på sid A-23 och framåt. Läs igenom detta för terminologins skull. Gå sedan rakt på den första sortens ODE, separabla ekvationer. Det bästa stället att läsa dem är nog i avsnitt 7.9, sid 465 och framåt.

En *separabel* ekvation är alltså en ekvation som kan skrivas på formen

$$\phi(y)y' = \psi(x) \quad \text{eller} \quad \phi(y)\frac{dy}{dx} = \psi(x) \tag{*}$$

Om funktionerna ϕ och ψ har primitiva funktioner Φ resp Ψ, dvs om $\Phi'(y) = \phi$ och $\Psi'(x) = \psi(x)$, så kan ekvationen skrivas

$$\Phi(y)y' = \Psi(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(\Phi(y)) = \frac{d}{dx}\Psi(x).$$

Om två funktioner har samma derivata, skiljer de sig som mest med en konstant, dvs $\Phi(y) = \Psi(x) + C$. Om man använder skrivsättet $\int \phi(y)\,dy$ för en primitiv funktion till ϕ (och motsvarande för ψ), betyder detta att man rent formellt kan få lösningen till (*) genom att multiplicera med symbolen dx och integrera:

$$\int \phi(y)\,dy = \int \psi(x)\,dx.$$

Ex 1-6 rekommenderas.

Linjära ODE av första ordningen kommer därnäst. Att ekvationen är *linjär* betyder att varje term i ekvationen innehåller den obekanta funktionen y endast i formen y eller y', dvs ekvationen kan skrivas på formen

$$a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

Här ska man lära sig *metoden*, inte den färdiga formeln uppe på sid 470. Om man exempelvis har ekvationen

$$y'\cos x + y\sin x = 1, \quad -\pi/2 < x < \pi/2,$$

ska man alltså gå tillväga på följande sätt:

1. Dividera med $\cos x$ så att koefficienten för y' blir 1:

$$y' + y\tan x = \frac{1}{\cos x}.$$

2. Bestäm en primitiv funktion $\mu(x)$ till koefficienten för y: här kan vi ta $\mu(x) = -\ln\cos x$ (kontrollera!)

3. Den *integrerande faktorn* är sedan $e^{\mu(x)}$; i vårt exempel får vi

$$e^{-\ln\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Ekvationen multipliceras med denna.

4. Vänsterledet kommer då att vara derivatan med avseende på x av produkten av den integrerande faktorn och den sökta funktionen:
$$\text{V.L.} = \frac{1}{\cos x}(y' + y\tan x) = y'\frac{1}{\cos x} + y\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{d}{dx}\left(y\frac{1}{\cos x}\right).$$

Ekvationen kan alltså skrivas
$$\frac{d}{dx}\left(y\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{y}{\cos x} = \tan x + C.$$

Nu har vi i princip löst ekvationen. Det återstår bara att lösa ut y:
$$y = \sin x + C\cos x.$$

Lös övningar på sid 472: nummer 1-3, 5, 7, 9, 11. En del av dem är både separabla och linjära. Lös dem i så fall på båda sätten för övnings skull!

Den tredje sortens ODE som vi tar upp är av typen
$$y'' + ay' + by = g(t),$$
där a och b är konstanter och $g(t)$ är en given funktion. (Att vi använder t som oberoende variabel beror på att den nästan alltid i tillämpningarna betyder tiden. Derivatorna y' och y'' är med avseende på t.) Först betraktar vi det fall då högerledet är 0; man säger då att ekvationen är *homogen*. Detta behandlas i avsnitt 3.7. Notera att härledningen utnyttjar ett resultat som finns i en övning efter asvnittet. Det finns flera andra sätt att härleda metoden, men i praktiken blir lösandet av denna typ av ODE rent mekaniskt. Man behöver bara lösa en enkel andragradsekvation. Läs **Ex 1-4** på sid 2221–222. En viktig fysikalisk tillämpning är harmonisk svängning i **Ex 5-6. Lös övningarna 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 och 15 på sid 228**.

Nu återstår *inhomogena* linjära ekvationer av andra ordningen med konstanta koefficienter, dvs ekvationer av typen
$$y'' + ay' + by = g(t) \tag{IH}$$
där $g(y)$ inte är identiskt noll. Man studerar denna ekvation *tillsammans* med motsvarande *homogena* ekvation
$$y'' + ay' + by = 0 \tag{H}$$
Detta behandlas inte alls i Adams, utan vi går här igenom den grundläggnade teorin:

Det är praktiskt att använda uttryckssätt från den *linjära algebran*. Vi låter D beteckna *deriveringsoperatorn*, dvs D "opererar" på en funktion y genom att förvandla den till dess derivata y'
$$Dy = y'.$$

Med hjälp av D definierar vi en ny operator L genom $L = D^2 + aD + bI$ (I är den s k *identitetsoperatorn* för vilken gäller $Iy = y$). Vi ser att
$$L(y) = (D^2 + aD + bI)(y) = D^2y + aDy + by = y'' + ay' + by.$$

Lemma: L är en *linjär* operator, dvs om y_1 och y_2 är funktioner och α_1 och α_2 är skalärer (dvs tal) så gäller
$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2).$$

Bevis: Resultatet följer av att derivering är en linjär operation. Utskrivet ser beviset ut så här:

$$\begin{aligned}
L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) &= (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)'' + a(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)' + b(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \\
&= \alpha_1 y_1'' + \alpha_2 y_2'' + a\alpha_1 y_1' + a\alpha_2 y_2' + b\alpha_1 y_1 + b\alpha_2 y_2 \\
&= (\alpha_1 y_1'' + a\alpha_1 y_1' + b\alpha_1 y_1) + (\alpha_2 y_2'' + a\alpha_2 y_2' + b\alpha_2 y_2) \\
&= \alpha_1 (y_1'' + a y_1' + b y_1) + \alpha_2 (y_2'' + a y_2' + b y_2) \\
&= \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2).
\end{aligned}$$

Med operatorn L kan vi formulera oss så här: y är en lösning till (H) precis om $L(y) = 0$ och y är en lösning till (IH) precis om $L(y) = g$.

Den teori som finns bakom metoden består av följande sats

Sats 1: Mängden av alla lösningar till (H) är ett linjärt rum av dimension 2.

Bevis: I vart och ett av de tre fallen (beroende på rötterna till den karakteristiska ekvationen) kan den allmänna lösningen skrivas som en linjärkombination av två ”baslösningar”, där koefficienterna är godtycklliga tal. I fall 1 (skilda reella rötter r_1 och r_2 har vi t ex $y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$. Lösningsmängden spänns alltså upp av ”vektorerna” $y_1 = C_1 e^{r_1 t}$ och $y_2 = C_2 e^{r_2 t}$ och dessa är linjärt oberoende (ingen av dem är en konstant multipel av den andra). På liknande sätt ser det ut i de båda andra fallen.

Nu kommer huvudsatsen om lösningarna till (IH):

Sats 2. Låt y_P vara *en* lösning till (IH). Då gäller att en funktion y är en lösning till (IH) om och endast om det finns en lösning y_H till (H) så att $y = y_H + y_P$.

Bevis: Antag först att y är en lösning till (IH). Sätt $z = y - y_P$. på grund av lineariteten gäller då

$$L(z) = L(y - y_P) = L(y) - L(y_P) = g - g = 0,$$

vilket betyder att z är en lösning till (H), som vi kan döpa om till y_P. Därmed är implikationen visad åt ena hållet.

Antag sedan att y är en funktion av formen $y = y_P + y_H$, där y_H är en lösning till (H). Då får vi

$$L(y) = L(y_P + y_H) = L(y_P) + L(y_H) = g + 0 = g,$$

vilket betyder att y är en lösning till (IH). Detta visar implikationen åt andra hållet. Beviset är därmed klart.

Den speciella lösningen y_P brukar kallas en *partikulärlösning* till (IH).

För att finna *alla* lösningar till (IH) räcker det alltså med att först lösa (H) fullständigt och sedan finna *en* lösning till (IH). det senare kan man ofta göra med hjälp av s k intelligenta gissningar (*ansatser*). En god princip är att tänka efter: vilken sorts uttryck kan det vara som när det sätts in i vänsterledet ger det resultat som vi har i högerledet? Man kan använda följande observation:

Funktioner av typerna

$$\text{polynom, } e^{kt} \text{ och } A\cos\alpha t + B\sin\alpha t$$

samt summor och produkter av dessa typer, har derivator som också är summor och produkter av samma sorts funktioner.

Man *kan* formulera regler för hur man ska gissa y_P men det kan vara onödigt att memorera dessa. Man klarar sig ofta med lite sunt förnuft och den inramade iakttagelsen ovan. Om det första försöket misslyckas, kan det löna sig att göra ett nytt försök där man multiplicerar det första med t. Vi ger några exempel (se även **Ex. 7** i Adams, sid 226).

Exempel 1: Bestäm en partikulärlösning till $y'' + 3y' + 2y = t^2$.

Lösning: Det borde kunna finnas en lösning som är ett andragradspolynom. Ansätt därför $y_P = at^2 + bt + c$ och sätt in i ekvationen. Vi får

$$\begin{aligned} y' &= 2at - b \\ y'' &= 2a \\ t^2 &= y_P'' + 3y_P' + 2y_P = 2a + 3(2at + b) + 2(at^2 + bt + c) = 2at^2 + (6a + 2b)t + (2a + 3b + 2c). \end{aligned}$$

Identifiering av koefficienter ger ekvationssystemet

$$2a = 1, \quad 6a + 2b = 0, \quad 2a + 3b + 2c = 0$$

som har entydig lösning $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = \frac{7}{4}$. En partikulärlösning är alltså $y_P = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{7}{4}$.

◇ ◇

Exempel 2: Samma problem för $y'' + 3y' + 2y = e^{2t}$.

Lösning: En vettig gissning är att det borde finnas en lösning av formen $y_P = ae^{2t}$. Derivering och insättning visar att det går bra om $a = \frac{1}{12}$ (genomför detta).

◇ ◇

Exempel 3: Samma problem för $y'' + 3y' + 2y = e^{-t}$.

Lösning: Om man försöker med $y_P = ae^{-t}$ så blir man snopen – sätter man in denna ansats i ekvationen blir vänsterledet lika med noll, och det går inte att välja a så att det blir lika med högerledet. Orsaken till detta är att funktionen e^{-t} är en av lösningarna till den motsvarande homogena ekvation. I denna situation brukar det löna sig att *multiplicera den misslyckade ansatsen med t* och försöka igen (kontrollera räkningarna):

$$\begin{aligned} y_P &= ate^{-t}, \quad y_P' = a(1-t)e^{-t}, \quad y_P'' = a(t-2)e^{-t} \\ e^{-t} &= a(t-2)e^{-t} + 3a(1-t)e^{-t} + 2ate^{-t} = ae^{-t}(t - 1 + 3(1-t) + 2t) = ae^{-t}(-4). \end{aligned}$$

Med $a = -\frac{1}{4}$ har vi funnit en lösning!

◇ ◇

Som exempel 3 visar, är det en god idé att *börja* med att lösa den homogena ekvationen, innan man ansätter en partikulärlösning. En ansats som har samma form som en lösning till den homogena ekvationen fungerar inte!

Observera att det nästan alltid går att *kontrollera* lösningen av en ODE genom att man deriverar och sätter in i ekvationen. Det är därför inte särskilt ursäktligt att komma med en felaktig lösning!