UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Michael Melgaard, tel 070 214 4075

Prov i Matematik
Prog: NV, Lär., fristående
Analys MN1
2006-05-24

Skrivtid: 15–20. Hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text/figurer. Poäng: anges efter varje uppgift. För Godkänt krävs minst 18 poäng och för Väl godkänt minst 28 poäng. Påbörja varje uppgift på nytt papper och skriv endast på papperets ena sida. Lycka till!

1.
(a) Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin x}$
(b) Använd derivatans definition för att bestämma derivatan till $1/x$.

(4p)

SVAR: 4 och $-1/x^2$.
Lösning:
(a):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{4x\sin 4x}{4x\sin x} = 4\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x}{4x}}{\frac{\sin x}{x}}\\ &= 4\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = 4\cdot\frac{1}{1} = 4.\end{aligned}$$

(b) Enligt definition är derivatan av f i x

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Med $f(x) = 1/x$ få vi då

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x}{x(x+h)}-\frac{x+h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x-x-h}{hx(x+h)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{hx(x+h)} = \frac{-1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{1}{x+h} = \frac{-1}{x}\frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2}.\end{aligned}$$

2. Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $x^3 + y^3 = 3xy$ i punkten $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

(4p)

SVAR: $y = \frac{4}{5}x + \frac{4}{5}$.
Lösning: Vi deriverar båda leden av $x^3 + y^3 + 2y = 3xy$ implicit och får

$$3x^2 + 3y^2y' = 3y + 3xy'$$

Vi bryter ut y' och får

$$y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$$

Med $(x, y) = (2/3, 4/3)$ insatt får vi

$$y' = \frac{4/9 - 4/3}{2/3 - 16/9} = \frac{-8/9}{-10/9} = 4/5.$$

Ekvationen för en linie genom (x_0, y_0) med lutning k är $y - y_0 = k(x - x_0)$ så tangentens ekvation blir $y - \frac{4}{3} = \frac{4}{5}\left(x - \frac{2}{3}\right)$ dvs $y = \frac{4}{5}x + \frac{4}{5}$.

3. Bestäm derivatorna till funktionerna

(a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

(b) $g(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

(5p)

SVAR: (a) $1/\sqrt{x^2+1}$, (b) $1/(x^2+1)$.

Lösning:

(a):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

(b):

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\left(\frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2}\right) \\ &= \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2 + (x-1)^2} = \frac{2}{(x^2 + 2x + 1) + (x^2 - 2x + 1)} \\ &= \frac{2}{2x^2 + 2} = \frac{1}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

4. Bestäm integralerna

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$.

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx$.

(5p)

SVAR: (a) $\dfrac{\pi}{2} - 1 \approx 0.5708$, (b) $1/2$.
Lösning:
(a) Vi bestämmer en primitiv function till $x\cos x$ med hjälp av partiell integration:

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Då blir den bestämda integralen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = [x\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.5708$$

b) Vi ansätter $t = \sin x$ och gör substitution

$$\int \sin x\cos x\,dx = [t = \sin x, dt = \cos x\,dx] = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Så

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}[\sin^2 x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

5. Lös begynnelsevärdesproblemen
(a)

$$\begin{cases} y' + 2xy = x \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 2x^2 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

(5p)

SVAR: (a) $y(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}e^{-x^2}$, (b) $y(x) = \dfrac{5}{3}e^{-x} + \dfrac{5}{6}e^{2x} - x^2 + x - \dfrac{3}{2}$.
Lösning:
(a) *Alternativ 1:* Vi löser differentialekvationen $y' + 2xy = x$ med hjälp av en integrerande faktor. En primitiv function till $2x$ är x^2 så den integrerande faktorn blir e^{x^2}. Vi får då

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{x^2}\right) = y'e^{x^2} + 2xye^{x^2} = (y' + 2xy)e^{x^2} = xe^{x^2}.$$

Integration av båda leden ger

$$\begin{aligned} ye^{x^2} &= \int xe^{x^2}\,dx = \left\{t = x^2, dt = 2x\,dx, \frac{dt}{2} = x\,dx\right\} \\ &= \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{e^t}{2} + C = \frac{e^{x^2}}{2} + C. \end{aligned}$$

Bryter vi ut y får vi

$$y(x) = e^{-x^2}\left(\frac{e^{x^2}}{2} + C\right) = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}.$$

Insättning av begynnelsevilkoret $y(0) = -2$ ger

$$y(0) = \frac{1}{2} + Ce^0 = \frac{1}{2} + C = -2$$

som ger att $C = -5/2$. Lösningen blir alltså

$$y(x) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}e^{-x^2}.$$

Alternativ 2: Differentialekvationen är separabel ty vi kan skriva om den som $y' = x - 2xy = x(1-2y)$ och får den då på formen

$$\frac{dy}{1-2y} = x\,dx.$$

Vi integrerar båda leden och får

$$\frac{-\ln|1-2y|}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

Vi multiplicerar båda leden med -2 och får $\ln|1-2y| = -x^2 + C_2$ och då är

$$|1-2y| = e^{-x^2+C_2} = C_3e^{-x^2}.$$

Eftersom $y(0) = -2$, dvs $1 - 2y > 0$ så kan vi ta bort absoluttecken och då har vi

$$y(x) = \frac{1}{2} - \frac{C_3}{2}e^{-x^2} = \frac{1}{2} + C_4e^{-x^2}.$$

Sätter vi in begynnelsevilkoret får vi $y(0) = 1/2 + C_4 = -2$ dvs $C_4 = -5/2$. Svaret blir då

$$y(x) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}e^{-x^2}.$$

(b) För att lösa den inhomogena differentalekvationen $y'' - y' - 2y = 2x^2$ löser vi först den homogena ekvationen $y''-y'-2y = 0$. Den har karakteristisk ekvation $r^2-r-2 = (r+1)(r-2) = 0$ dvs rötterna är $r = -1$ och $r = 2$. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen blir alltså $y_h = Ae^{-x} + Be^{2x}$. Vi söker nu en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen. Eftersom högerledet är ett polynom av andra graden ansätter vi $y_p = ax^2 + bx + c$. Då är $y_p' = 2ax + b$ och $y_p'' = 2a$. Insatt i ekvationen får vi

$$\begin{aligned} y'' - y' - 2y &= 2a - (2ax+b) - 2(ax^2+bx+c) \\ &= (-2a)x^2 + (-2a-2b)x + (2a-b-2c) = 2x^2. \end{aligned}$$

Vi får ekvationerna $-2a = 2$, $-2a-2b = 0$ och $2a-b-2c = 0$ som har lösning $a = -1$, $b = 1$ och $c = -3/2$. Partikulärlösningen är härmed bestämd. Den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen blir alltså

$$y = y_h + y_p = Ae^{-x} + Be^{2x} - x^2 + x - 3/2.$$

Återstår att bestämma A och B med begynnelsevillkoren. Det första villkoret $y(0) = 1$ ger

$$y(0) = Ae^0 + Be^0 - 0 + 0 - 3/2 = A + B - 3/2 = 1$$

och därmed den första ekvationen $A + B = 5/2$. Deriverar vi y får vi

$$y'(x) = -Ae^{-x} + 2Be^{2x} - 2x + 1.$$

Det andra villkoret $y'(0) = 1$ ger

$$y'(0) = -A + 2B - 0 + 1 = 2B - A + 1 = 1$$

dvs den andra ekvationen $2B - A = 0$. Ekvationerna tillsammans har lösningen $A = 5/3$ och $B = 5/6$. Lösningen till den inhomogena differentialekvationen är då

$$y(x) = \frac{5}{3}e^{-x} + \frac{5}{6}e^{2x} - x^2 + x - \frac{3}{2}.$$

6. En cylindrisk konservburk med volym 0.4 dm^3 skall tillverkas. Ange de dimensioner (radie och höjd) som minimerar den totala arean av burkens ytor (topp + botten + sida).

(5p)

SVAR: Radie $\left(\frac{0.2}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0.3993$ dm. och höjd $2\left(\frac{0.2}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0.7986$ dm.

Lösning: Volymen av en cylinder med höjden h och radien r är $V = \pi r^2 h$ som är bestämd att vara 0.4. Då är

$$h = \frac{0.4}{\pi r^2}.$$

Arean av burkens ytor är

$$A = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{topp+bottom}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{sidan}}.$$

Med formlen för h insatt får vi arean uttryckt enbart i variabeln r:

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{0.8}{r}.$$

Denna har derivatan

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{0.8}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 0.8}{r^2}$$

och vi sökar de r som ger $A'(r) = 0$. Det får vi då täljaren i derivatans uttryck är noll dvs då

$$r = r_0 = \left(\frac{0.8}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{0.2}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0.3993\,\mathrm{dm}.$$

Detta är en minimum-punkt ty om $r > r_0$ så är $A'(r) < 0$ och om $r > r_0$ så är $A'(r) > 0$. Om vi sätter in uttrycket för radien i formeln för höjden får vi

$$h = \frac{0.4}{\pi\left(\frac{0.2}{\pi}\right)^{2/3}} = 2\left(\frac{0.2}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0.7986\,\mathrm{dm}.$$

7. Ett badkar som står i ett rum med temperaturen 20° fylls med vatten som har temperaturen 55°. Enligt Newton's kylningslag är vattentemperaturens ändringshastighet proportionell mot skillnaden mellan vattnets och rummets temperatur. En mätning visar att efter en timme har vattnets temperatur sjunkit med 10°. När har vattnet uppnått en mer behaglig temperatur, dvs 35°?

(6p)

SVAR: Efter $\dfrac{\ln\frac{3}{7}}{\ln\frac{5}{7}} \approx 2.518$ timmar.

Lösning: Låt T vara vattnets temperatur och låt t vara tiden i timmar. Enligt Newton's lag är då

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20),$$

som är en separabel differentialekvation. Vi får

$$\begin{aligned}\int \frac{dT}{T-20} &= \int k\,dt\\ \ln|T-20] &= kt + C\\ |t-20| &= e^{kt+C} = Ae^{kt}.\end{aligned}$$

Eftersom $T > 20$ så kan vi ta bort absoluttecken och får då

$$T(t) = Ae^{kt} + 20.$$

Vid $t = 0$ är $T = 55$ dvs $T(0) = Ae^0 + 20 = A + 20 = 55$ som ger $A = 35$. Då är

$$T(t) = 35e^{kt} + 20.$$

Vid tiden $t = 1$ är $T = 45$ som ger $T(1) = 35e^k + 20 = 45$ och då blir $e^k = 5/7$. Då är

$$T(t) = 35(5/7)^t + 20.$$

Vi söker tid t då $T = 35$, dvs

$$35(5/7)^t + 20 = 35.$$

Vi får:

$$(5/7)^t = \frac{3}{7} \Rightarrow t = \frac{\ln\frac{3}{7}}{\ln\frac{5}{7}} \approx 2.518 \text{ timmar.}$$

8. Ett snöre med längden 1 meter delas i två delar: den ena delen formas till en cirkel och den andra till en kvadrat. Hur skall snöret delas för att minimera respektive maximera den totala arean av cirkeln och kvadraten?

(6p)

SVAR: Den största arean fås för en cirkel av hela snöret dvs vid $x = 1$, arean blir då $1/4\pi \approx 0.0796$. Den minsta arean fås då vi delar snöret vid $x = \pi/(4+\pi) \approx 0.44$, arean blir då $1/(16+4\pi) \approx 0.035$.
Lösning: Antag att vi delar snöret i två så att cirkeln får x meter och kvadraten får $1-x$ meter. Då skall x ligga i intervallet $0 \leq x \leq 1$. Cirkeln har alltså omkretsen x meter. Om cirkelns radie är r, så ges omkretsen av $2\pi r$ dvs $r = x/2\pi$. Den area som cirkeln får är då

$$A_c = \pi r^2 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}.$$

Om kvadraten har sidlängd a så gäller $1 - x = 4a$, dvs $a = (1-x)/4$. Kvadratens area blir

$$A_k = a^2 = \frac{(1-x)^2}{16} = \frac{(x-1)^2}{16}.$$

Den totala arean A kan nu uttryckas i enbart variabeln x. Vi får

$$A(x) = A_c(x) + A_k(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(x-1)^2}{16}.$$

För att bestämma extrempunkterna deriverar vi och söker nollställena:

$$A'(x) = \frac{x}{2\pi} + \frac{2(x-1)}{16} = \frac{x}{2\pi} + \frac{x}{8} - \frac{1}{8} = 0,$$

dvs

$$x = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{8\left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}\right)} = \frac{1}{\frac{4}{\pi} + 1} = \frac{\pi}{4+\pi} \approx 0.4399$$

Arean i denna punkt blir

$$\frac{\left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^2}{4\pi} + \frac{\left(\frac{\pi}{4+\pi} - 1\right)^2}{16} = \frac{1}{16+4\pi} \approx 0.0350$$

Vi beräknar nu arean i ändpunkterna 0 resp 1:

$$\begin{aligned} A(0) &= \frac{0^2}{4\pi} + \frac{(0-1)^2}{16} = \frac{1}{16} \approx 0.0625 \\ A(1) &= \frac{1^2}{4\pi} + \frac{(1-1)^2}{16} = \frac{1}{4\pi} \approx 0.0796 \end{aligned}$$

Den största arean fås då vi för en cirkel av hela snöret dvs vid $x = 1$, arean blir då $1/4\pi \approx 0.0796$. Den minsta arean fås då vi delar snöret vid $x = \pi/(4+\pi) \approx 0.44$, arean blir då $1/(16+4\pi) \approx 0.035$