UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Thomas Erlandsson, Lars-Åke Lindahl
Björn Ivarsson, Mattias Palmer

Prov i matematik
MNP, Frist. kurs
Analys MN1
2000–01–13

Skrivtid: 9.00–14.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Maximal poäng på varje problem är 5. För godkänt krävs 18 poäng och för väl godkänt 28 poäng inklusive eventuella bonuspoäng.

1. Beräkna

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)-x^2}{e^{x^3}-1}.$$

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''-y=x-1$ för vilka $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

3. Beräkna integralerna

$$\text{a)}\quad \int_1^{e^2}\frac{dx}{x(2+\ln x)} \qquad\qquad \text{b)}\quad \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx.$$

4. Bestäm största möjliga volym för den cylinder som bildas då rektangeln med hörn i

$$A=(0,0),\quad B=(a,0),\quad C=(a,ae^{-a}),\quad D=(0,ae^{-a}),$$

roterar kring x-axeln, $0<a<\infty$.

5. Skissera kurvan

$$y=\frac{|x-1|}{x-1}\left(\frac{x^2+1}{x}\right).$$

Bestäm särskilt dess definitionsmängd, asymptoter och lokala extrempunkter.

6. För vilka värden på konstanten a är serien

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^a}$$

konvergent?. För vilka a-värden är serien dessutom absolut konvergent?

7. Lös differentialekvationen $y'+(2\tan x)y=\cos^2 x$, $|x|<\dfrac{\pi}{2}$.

8. Bestäm de värden på konstanten m för vilka linjen $y=mx+5$ tangerar kurvan

$$x^2+y^2=9.$$

Lösning till problem 1: Vi använder Maclaurin-utvecklingar:

$$\frac{\ln^2(1+x)-x^2}{e^{x^3}-1} = \frac{\big(x-x^2/2+O(x^3)\big)^2-x^2}{(1+x^3+O(x^6))-1} = \frac{-x^3+O(x^4)}{x^3+O(x^6)}$$
$$= \frac{-1+O(x)}{1+O(x^3)} \to -1 \quad \text{då } x \to 0,$$

Lösning till problem 2: Den karakteristiska ekvationen till den homogena ekvationen är $m^2-1=0$ vilket ger lösning till den homogena ekvationen $y_H = Ae^x + Be^{-x}$.
Ansats för partikulärlösning är $y_P = Cx+D$ vilket insatt i ekvationen ger $-Cx-D = x-1$ dvs $C=-1, D=1$.
Vi får nu den allmänna lösningen $y = y_H + y_P = Ae^x + Be^{-x} - x + 1$. Begynnelsevillkoren ger ekvationssystemet

$$\left.\begin{array}{rcl} A+B+1 &=& 1 \\ A-B-1 &=& 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} A &=& 1/2 \\ B &=& -1/2 \end{array}\right.$$

vilket ger lösningen

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x + 1 = \sinh x - x + 1.$$

Lösning till problem 3: I 3a gör vi en substitution

$$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(2+\ln x)} = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = dx/\ln x \end{bmatrix} = \int_0^2 \frac{dt}{2+t} = \big[\ln(2+t)\big]_0^2 = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2.$$

I 3b gör vi först en partiell integration och sedan en division

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = \big[x\ln(1+x^2)\big]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$
$$= \ln 2 - 2\int_0^1 \big(1 - \frac{1}{1+x^2}\big)\,dx = \ln 2 - 2\big[x - \arctan x\big]_0^1$$
$$= \ln 2 - 2(1-\pi/4) = \ln 2 - 2 + \pi/2.$$

Lösning till problem 4: Volymen av cylindern ges av funktionen

$$V(a) = \pi r^2 h = \pi\big(ae^{-a}\big)^2 \cdot a = \pi a^3 e^{-2a}.$$

definierad för $0 < a < \infty$. Vi ser att $V(a) \to 0$ då $a \to 0$ eller $a \to \infty$. Derivatan ges av

$$V'(a) = \pi e^{-2a}\big(3a^2 - 2a^3\big) = \pi e^{-2a} a^2 \big(3-2a\big)$$

Enda nollställe är $a = 3/2$ vilket ger största värdet $V_{\max} = V(3/2) = \pi\big(\frac{3}{2}\big)^3 e^{-3}$.

Lösning till problem 5: Vi ser att funktionen kan skrivas som

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x} & x > 1 \\[2ex] -\dfrac{x^2+1}{x} = -x - \dfrac{1}{x} & x < 1, x \neq 0. \end{cases}$$

Definitionsmängden är alla x skilda från 0 och 1. Vi ser också att $y = x + 0$ är asymptot då $x \to \infty$ och $y = -x + 0$ är asymptot då $x \to -\infty$. Vidare är $x = 0$ en lodrät asymptot med

$$\lim_{x\to 0+} y = -\infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 0-} y = \infty.$$

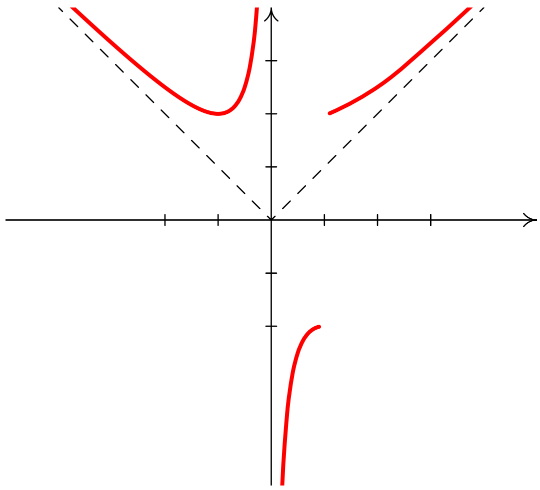
Derivatan blir

$$y' = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} & x > 1 \\ -1 + \dfrac{1}{x^2} & x < 1, x \neq 0 \end{cases}$$

och vi får följande teckenstudium

x		-1		0		1	
y'	$-$	0	$+$	∞/∞	$+$	$0/0$	$+$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\infty/-\infty$	$\nearrow$	$-2/2$	$\nearrow$

Vi har ett lokalt minimum i -1. Notera att funktionen har ett språng i $x = 1$ med vänstergränsvärde -2 och högergränsvärde 2. Grafen får följande utseende



Lösning till problem 6: Serien är divergent då $a \leq 0$ ty termerna går ej mot 0. För $0 < a \leq 1$ är serien betingat konvergent enligt Leibniz' kriterium. För $a > 1$ är serien absolut konvergent enligt jämförelse med standardserie $\sum 1/n^p$ för $p > 1$.

Lösning till problem 7: Integrerande faktor till ekvationen är

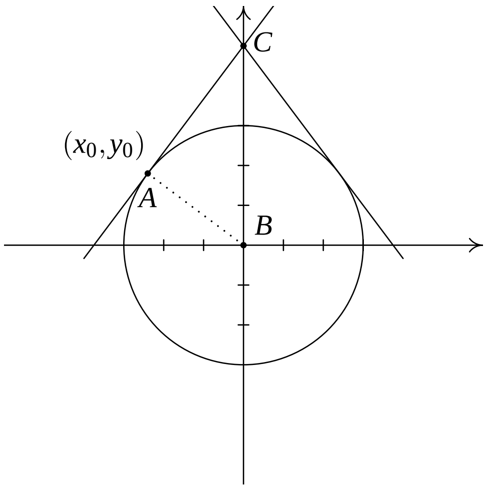
$$e^{\int 2\tan x\, dx} = e^{-2\ln|\cos x|} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Om ekvationen multipliceras med denna övergår den i

$$\frac{d}{dx}\frac{y}{\cos^2 x} = 1 \Longrightarrow \frac{y}{\cos^2 x} = x + C$$

varur lösningen enkelt fås.

Lösning till problem 8: Vi ritar först en figur som hjälp:



Antag att $A = (x_0, y_0)$ är en tangeringspunkt. Punkterna $B = (0,0)$ och $C = (0,5)$. Implicit derivering av cirkelns ekvation ger att $2x + 2yy' = 0$ vilket ger att $y' = -x/y$. Således är tangentens riktningskoefficient $m = -x_0/y_0$. Dess ekvation är enligt enpunktsformeln

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Longrightarrow y = mx + y_0 - mx_0.$$

Således är $y_0 - mx_0 = 5$ vilket ger att

$$y_0 - mx_0 = y_0 + \frac{x_0^2}{y_0} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0} = \frac{9}{y_0} = 5 \Longrightarrow y_0 = \frac{9}{5}.$$

Ur cirkelns ekvation fås nu $x_0 = \pm\sqrt{9 - y_0^2} = \pm\frac{12}{5}$. De möjliga m-värdena fås nu som

$$m = -\frac{x_0}{y_0} = \pm\frac{4}{3}.$$

En enklare lösning kan fås rent geometriskt. I triangeln ABC är $AB = 3$ (radie) och $BC = 5$. Då blir $AC = 4$ (rätvinklig triangel). Vinkeln som tangenten bildar med x-axeln återfinns som $\alpha = \angle ABC$ och vi får

$$m = \tan\alpha = \frac{4}{3}$$

Det andra möjliga värdet fås för den andra tangenten.