UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Anders Källström

Prov i matematik
Distans, Matematik A
Analys
2002–02–16

Skrivtid: 10-15. Hjälpmedel: Gymnasieformelsamling. Lösningarna skall *åtföljas av förklarande text och figurer. Varje problem ger högst 5 poäng. Vill du räkna din poäng från delprovet ska du ej lämna in lösning på problem 1 och 2. Väljer du att redovisa lösning på något av dessa problem, räknas istället poängen från slutprovet* för både problem 1 och 2. *För godkänt krävs minst 18 poäng, för väl godkänt minst 28 poäng, inklusive din poäng från delprovet.*

1. Beräkna gränsvärdena

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\arctan 2x}{2\tan x-\ln(1+2x)-2x^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3}\right).$

(Gå till lösningen)

2. Visa att funktionen $f(x)=(x^2-3x+4)e^x$ har en invers och beräkna derivatan $(f^{-1})'(4)$.
(Gå till lösningen)

3. Undersök funktionen

$$f(x)=|x+2|e^{1/x}$$

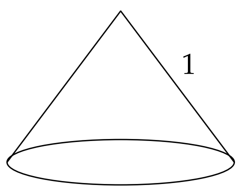
med avseende på lokala extrempunkter och asymptoter. Skissera grafen. (Gå till lösningen)

4. Beräkna integralerna

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+2)(x^2+2x+2)}$, b) $\displaystyle\int_0^1 x\arctan x^2\,dx.$

(Gå till lösningen)

5. Vad är den största möjliga volymen av en rak cirkulär kon vars generatris har längd 1? (En generatris är en linje från konens topp till en punkt på periferin på bascirkeln.)



(Gå till lösningen)

6. Lös differentialekvationen $y''+4y=\cos ax$ för alla reella värden på parametern a. (Gå till lösningen)

7. Undersök för vilka värden på den reella konstanten m serien

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k^m (1-\cos\frac{1}{k})$$

är konvergent, respektive absolut konvergent. (Gå till lösningen)

8. Bestäm, för alla reella värden på konstanten a, antalet reella lösningar till ekvationen

$$x = ae^x.$$

(Gå till lösningen)

Några MacLaurin-utvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + O(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + O(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + O(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \frac{(-1)^n}{n}x^n + O(x^{n+1})$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} + O(x^{2n+1})$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + O(x^{n+1})$$

Lösning till problem 1a: Vi använder MacLaurin-utvecklingar:

$$\frac{2\sin x-\arctan 2x}{2\tan x-\ln(1+2x)-2x^2}=\frac{2\big(x-x^3/6+O(x^5)\big)-\big(2x-8x^3/3+O(x^6)\big)}{2\big(x+x^3/3+O(x^5)\big)-\big(2x-4x^2/2+8x^3/3+O(x^4)\big)-2x^2}$$
$$=\frac{\big(-1/3+8/3\big)x^3+O(x^5)}{\big(2/3-8/3\big)x^3+O(x^4)}=\frac{7/3+O(x^2)}{-2+O(x)}\to-\frac{7}{6}$$

1b) Sätt $x=1/t$ ($x\to\infty\Leftrightarrow t\to+0$). Vi får

$$\sqrt{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}}-\sqrt{\frac{1}{t^3}}=\frac{\sqrt{1+t}-1}{t^{3/2}}=\frac{t+O(t^2)}{t^{3/2}}$$
$$=\frac{1}{t^{1/2}}+O\big(t^{1/2}\big)\to\infty\quad\text{då } t\to+0.$$

Lösning till problem 2: Derivatan till funktionen $f(x)=(x^2-3x+4)e^x$ ges av

$$f'(x)=e^x(x^2-3x+4+2x-3)=e^x(x^2-x+1)=e^x((x-1/2)^2+3/4)>0\quad\text{för alla } x.$$

Detta medför att f är strängt växande och har således en invers funktion. Vi ser vidare att $f(0)=4$ dvs $f^{-1}(4)=0$. Derivatan av invers funktion ger nu

$$\big(f^{-1}\big)'(4)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{1}=1.$$

Lösning till problem 3: Definitionsmängden är $x\neq 0$ och vi kan skriva

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)e^{1/x} & \text{för } x\geq -2\ x\neq 0\\ -(x+2)e^{1/x} & \text{för } x<-2\end{cases}$$

Vi ser enkelt att

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\infty\quad\text{och}\quad\lim_{x\to-0}f(x)=0$$

dvs $x=0$ är en lodrät asymptot. För att bestämma sneda asymptoter skriver vi för stora positiva x

$$f(x)=(x+2)\Big(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+O(1/x^3)\Big)=x+3+\frac{5}{2x}+O(1/x^2)$$

vilket ger att $y=x+3+0$ är asymptot då $x\to\infty$. På analogt sätt visas att $y=-x-3+0$ är asymptot då $x\to-\infty$.

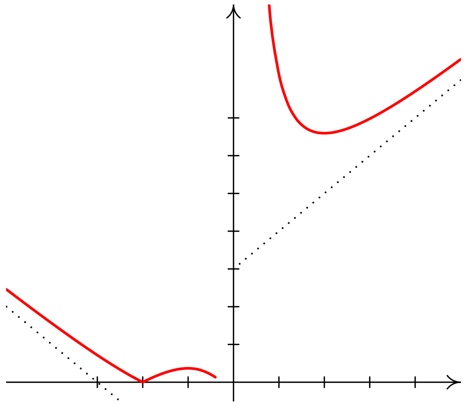
Derivatan beräknas till

$$f'(x)=\begin{cases}\Big(1-\dfrac{x+2}{x^2}\Big)e^{1/x}=\dfrac{x^2-x-2}{x^2}e^{1/x} & x>-2,\ x\neq 0\\ \Big(-1+\dfrac{x+2}{x^2}\Big)e^{1/x}=-\dfrac{x^2-x-2}{x^2}e^{1/x} & x<-2\end{cases}$$

med nollställen -1 och 2. Ett teckenstudium för derivatan ger

x	$-\infty$		-2		-1		0		2		∞
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	odef	$+$	0	$-$	$-0/-\infty$	$-$	0	$+$	∞
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	$0/\infty$	$\searrow$	$4\sqrt{e}$	$\nearrow$	∞

Lokala extrempunkter är således $(-2,0)$ och $(2,4\sqrt{e})$ (lok. minima) samt $(-1,e^{-1})$ (lokalt maximum). Grafen får följande utseende



Lösning till problem 4: I a) gör vi en partialbråksuppdelning med ansats

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} \Longrightarrow$$
$$1 = A(x^2+2x+2) + (Bx+C)(x+2)$$

vilket ger ekvationssystemet

$$\left.\begin{array}{rlcl} x^2: & A+B & = & 0 \\ x: & 2A+2B+C & = & 0 \\ x^0: & 2A+2C & = & 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} A & = & 1/2 \\ B & = & -1/2 \\ C & = & 0 \end{array}\right.$$

Integralen blir således

$$\frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x+2} - \frac{x}{x^2+2x+2}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x+2} - \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2+1}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\big(\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1)\big).$$

I b) gör vi substitutioner

$$\int_0^1 x\arctan x^2\, dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2x\, dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan t\, dt = \Big[\frac{t}{2}\arctan t\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\, dt$$
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.$$

Lösning till problem 5: Om r är basradien och h höjden i konen så gäller $r^2+h^2=1$ (enligt Pythagoras). Volymen kan skrivas som

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi(1-h^2)h}{3} = \frac{\pi}{3}(h-h^3)$$

definierad för $0 \le h \le 1$. I ändpunkterna gäller $V(0) = V(1) = 0$. Det finns inga singulära punkter. Kritiska punkter bestäms av

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(1-3h^2) = 0 \Longrightarrow h = 1/\sqrt{3}.$$

Detta h-värde ger maximum $V_{\max} = V(1/\sqrt{3}) = 2\pi/9\sqrt{3}$.
Lösning till problem 6: Karakteristiska ekvationen till den homogena ekvationen är $m^2+4=0$ med rötter $m = \pm 2i$. Lösningen till den homogena ekvationen är således $y_H = A\cos 2x + B\sin 2x$.

Om $|a| \neq 2$ så ansätter vi partikulärlösning $y_P = C\cos ax + D\sin ax$ vilket insatt i ekvationen ger

$$-Ca^2\cos ax - Da^2\sin ax + 4C\cos ax + 4D\sin ax = \cos ax$$

Detta är uppfyllt om $D = 0$ och $C = 1/(4-a^2)$ och den fullständiga lösningen är

$$y = y_H + y_P = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{4-a^2}\cos ax.$$

Om $|a| = 2$ måste vi modifiera ansatsen till $y_P = (C\cos 2x + D\sin 2x)x$. Nu blir

$$y_P'' + 4y_P = -4C\sin 2x + 4D\cos 2x = \cos 2x$$

vilket ger $C = 0$ och $D = 1/4$. Den fullständiga lösningen blir i detta fall

$$y = y_H + y_P = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{x}{4}\sin 2x.$$

Lösning till problem 7: MacLaurin-utveckling ger att

$$1 - \cos\frac{1}{k} = 1 - \Big(1 - \frac{1}{2k^2} + O(1/k^4)\Big) = \frac{1}{2k^2} + O(1/k^4)$$

och termerna i serien kan skrivas

$$a_k = (-1)^k k^m\Big(\frac{1}{2k^2} + O(1/k^4)\Big) = (-1)^k k^{m-2}\Big(\frac{1}{2} + O(1/k^2)\Big).$$

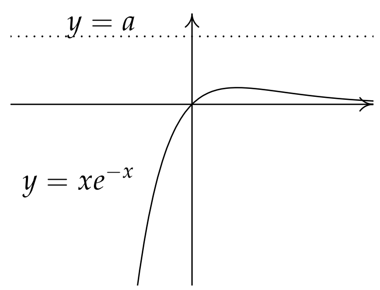
Om $m - 2 \geq 0$ så gäller $a_k \not\to 0$ dvs serien divergerar.
Om $-1 \leq m-2 < 0$ så ger Leibniz kriterium att serien är betingat konvergent.
Om $m - 2 < -1$ så är serien absolut konvergent (jämför $|a_k|$ med standardserie av typ $\sum 1/k^p$).

Lösning till problem 8: Vi konstaterar först att ekvationen $x = ae^x$ är ekvivalent med $xe^{-x} = a$. Vi jämför nu graferna $y = xe^{-x}$ och $y = a$ och ser hur många skärningspunkter de har.

För $y = xe^{-x}$ blir derivatan $y' = (1-x)e^{-x}$ med nollställe $x = 1$. Funktionen är växande för $x \leq 1$ och avtagande för $x > 1$, maximum i $(1, 1/e)$. Vidare gäller

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0.$$

Grafen får följande utseende



Från detta ser vi enkelt att

$$\begin{array}{lll} a > 1/e & \Longrightarrow & \text{inga rötter} \\ a = 1/e & \Longrightarrow & \text{en dubbelrot} \\ o < a < 1/e & \Longrightarrow & \text{två rötter} \\ a \leq 0 & \Longrightarrow & \text{en rot} \end{array}$$