UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Anders Källström

Prov i matematik
Distans, Matematik A
Analys
2003–02–15

Skrivtid: 10-15. Hjälpmedel: Gymnasieformelsamling. Lösningarna skall *åtföljas av förklarande text och figurer. Varje problem ger högst 5 poäng. Vill du räkna din poäng från delprovet ska du ej lämna in lösning på problem 1 och 2. Väljer du att redovisa lösning på något av dessa problem, räknas istället poängen från slutprovet* för både problem 1 och 2. *För godkänt krävs minst 18 poäng, för väl godkänt minst 28 poäng, inklusive din poäng från delprovet.*

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty}\left(x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.

2. En rät linje parallell med x-axeln skär kurvan $y = 1/(x^2+1)$ i punkterna A och B. Tangenterna i A och B skär varandra i C. Bestäm linjen AB så att arean av triangeln ABC blir maximal.

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 6y' + 9y = 9x$ som tangerar x-axeln i origo.

4. Beräkna integralerna

$$\text{a)}\quad \int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx \qquad \text{b)}\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

5. Rita kurvan $y = 2x - x^3$ i dess huvuddrag. Genom origo går tre räta linjer som är normaler till kurvan. En av dessa har fotpunkten i origo, dvs den är normal till kurvan i denna punkt. Vilka är de båda andra normalernas fotpunkter?

6. Undersök om följande serier är konvergenta eller divergenta:

$$\text{a)}\quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k\sin\frac{1}{k} \qquad \text{b)}\quad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin k}{k(\sqrt{k}-1)}.$$

7. Betrakta kurvan $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Om den figur som bildas av kurvans del mellan $x = 0$ och $x = 1$ samt av sträckan $y = 1$, $0 \le x \le 1$, roterar kring y-axeln bildas en rotationskropp. Beräkna dess volym.

8. Låt $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ för $x \neq 0$. Kan f ges ett värde även för $x = 0$ så att funktionen blir kontinuerlig där. Vilket är i så fall detta värde? Blir även derivatan f' kontinuerlig för $x = 0$ i detta fall?

(V.g.v)

Några MacLaurin-utvecklingar

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + O(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + O(x^{2n+1}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + O(x^{2n+2}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \frac{(-1)^n}{n} x^n + O(x^{n+1}) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n + O(x^{n+1}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} + O(x^{2n+1}) \\
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + O(x^{n+1})
\end{aligned}
$$

Lösning till problem 1: Vi använder MacLaurin-utveckling

$$\begin{aligned} x - x^2 \ln\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) &= x - x^2\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + O(1/x^3)\Big) \\ &= x - \Big(x - \frac{1}{2} + O(1/x)\Big) = \frac{1}{2} + O(1/x) \\ &\to \frac{1}{2} \text{ då } x \to \infty \end{aligned}$$

Lösning till problem 2: De två skärningspunkterna mellan kurvan $y = 1/(x^2+1)$ och linjen $y = b$ ges av $A = (-a,\ 1/(a^2+1))$ och $B = (a,\ 1/(a^2+1))$ där $b = 1/(a^2+1)$. Av symmetriskäl ligger C på y-axeln. Tangenten i B har ekvation

$$Y - \frac{1}{a^2+1} = \frac{-2a}{(a^2+1)^2}(X - a)$$

vilket ger för $X = 0$ att $Y = \dfrac{1}{a^2+1} + \dfrac{2a^2}{(a^2+1)^2}$ dvs $C = \Big(0, \dfrac{1}{a^2+1} + \dfrac{2a^2}{(a^2+1)^2}\Big)$. Vi kan nu beräkna arean $F(a)$ av triangeln ABC som funktion av a. Vi får

$$F(a) = \frac{1}{2} \cdot \text{bas} \cdot \text{höjd} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2a^2}{(a^2+1)^2} = \frac{2a^3}{(a^2+1)^2}$$

med definitionsmängd $0 \le a < \infty$. Vi ser omedelbart att $F(0) = \lim_{a\to\infty} F(a) = 0$. Vidare är

$$F'(a) = \frac{6a^2(a^2+1)^2 - 2a^3 \cdot 2(a^2+1) \cdot 2a}{(a^2+1)^4} = \frac{a^2(6 - 2a^2)}{(a^2+1)^3}.$$

Maximum inträffar för $a = \sqrt{3}$ vilket ger linjen AB:s ekvation $y = \dfrac{1}{4}$.

Lösning till problem 3: Den homogena differentialekvationen $y'' - 6y' + 9y = 0$ har karakteristiska ekvationen $m^2 - 6m + 9 = 0$, med dubbelrot $m = 3$. Således är lösningen till den homogena ekvationen $y_H = Ae^{3x} + Bxe^{3x}$ (A och B godtyckliga konstanter).

Den inhomogena differentialekvationen har ett högerled som är ett polynom av grad 1. Vi ansätter därför en partikulärlösning av formen $y_P = Cx + D$. Insättning i ekvationen ger att $-6C + 9(Cx + D) = 9x$. Om vi identifierar koefficienter för x-termer och konstanttermer får vi

$$\begin{cases} 9C &= 9 \\ -6C + 9D &= 0 \end{cases} \quad \text{med lösning} \quad \begin{cases} C &= 1 \\ D &= \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Således är $y_P = x + 2/3$. Den allmänna lösningen blir då

$$y = y_P + y_H = Ae^{3x} + Bxe^{3x} + x + 2/3.$$

Villkoret tangering i origo medför att $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$. Detta ger

$$\begin{cases} y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + \dfrac{2}{3} &= 0 \\ 3A + B + 1 &= 0 \end{cases} \quad \text{vilket ger att} \quad \begin{cases} A &= -2/3 \\ B &= 1 \end{cases}$$

Den sökta lösningen är alltså

$$y = -\frac{2}{3}e^{3x} + xe^{3x} + x + 2/3 = /x - \frac{2}{3})e^{3x} + x + \frac{2}{3}.$$

Lösning till problem 4a: En partiell integration ger

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\arctan x}{x}\right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{\pi}{4} + \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}.$$

För att beräkna den andra integralen gör vi en partialbråksuppdelning. Ansätt

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow$$
$$1 = A(1+x^2) + x(Bx+C).$$

Identifiering av koefficienter ger ekvationssystem

$$\left.\begin{array}{lrcl} x^2\text{-koeff:} & A+B & = & 0 \\ x\text{-koeff:} & C & = & 0 \\ x^0\text{-koeff:} & A & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} A & = & 1 \\ B & = & -1 \\ C & = & 0 \end{array}\right.$$

Nu blir

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^\infty = \left[\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]_1^\infty$$
$$= \ln 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Detta ger till slut värdet

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

Lösning till problem 4b: Den enklaste lösningen fås genom en substitution

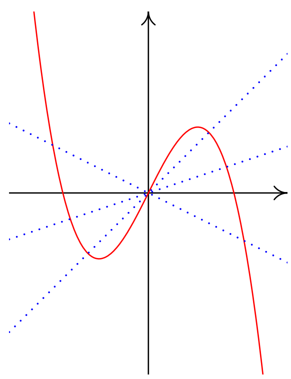
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{x\,dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow x^2 = t^2-1 \\ dt = x\,dx/\sqrt{x^2+1} \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t^2-1}$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{1}{2}(\ln|t-1| - \ln|t+1|) = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{t=\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

Lösning till problem 5:

Antag att fotpunkten till normalen ges av $(p, 2p-p^3)$. Ekvationen för normalen blir

$$y - (2p - p^3) = \frac{-1}{2-3p^2}(x-p).$$

Eftersom normalen ska gå genom origo måste $-(2p-p^3) = \frac{p}{2-3p^2}$ vilket ger ekvationen $p + (2-3p^2)(2-p^2)p = 0$ eller $p(3p^4 - 8p^2 + 5) = 0$. Den andra faktorn kan delas upp (man kan lösa motsvarande ekvation som en andragradsekvation med p^2 som obekant) i



$$p(p^2-1)(3p^2-5) = 0.$$

Vi får följande fall

1. $p = 0$ ger fotpunkt $(0, 0)$ på normalen $y = -x/2$.
2. $p = 1$ och $p = -1$ ger fotpunkter $(1, 1)$ resp $(-1, -1)$ på normalen $y = x$.
3. $p = \sqrt{5/3}$ resp $p = -\sqrt{5/3}$ ger fotpunkter $(\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3}/3)$ resp $(-\sqrt{5/3}, -\sqrt{5/3}/3)$ på normalen $y = x/3$.

Lösning till problem 6a: Serien konvergerar ej eftersom termerna ej går mot 0

$$k \sin \frac{1}{k} = k\Big(\frac{1}{k} + O(1/k^3)\Big) = 1 + O(1/k^2) \to 1.$$

Lösning till problem 6b: Serien är absolut konvergent eftersom

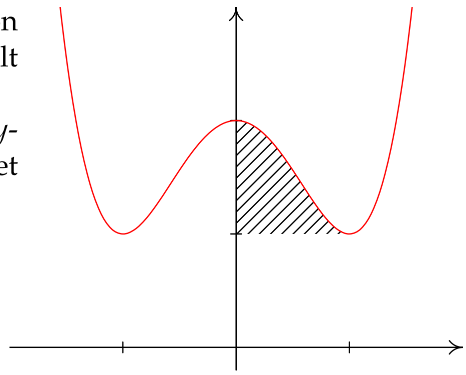
$$\left|\frac{\sin k}{k(\sqrt{k}-1)}\right| \leq \frac{1}{k(\sqrt{k}-1)} = \frac{1}{k^{3/2}} \underbrace{\frac{1}{1 - 1/\sqrt{k}}}_{\to 1} \sim \frac{1}{k^{3/2}}$$

Jämför med standardserie med exponent $3/2 > 1$.

Lösning till problem 7:

Kurvan ritas enkelt om vi noterar att det är en jämn funktion och vi kan skriva den som $y = (x^2 - 1)^2 + 1$. Vi har ett lokalt max för $x = 0$ och lokala minima för $x = \pm 1$.

Volymen som fås då det streckade området roterar runt y-axeln beräknas enklast med cylindriska skal. Höjden av skalet ges av skillnaden $h(x) = y(x) - 1$. Vi får då



$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi x h(x)\, dx = 2\pi \int_0^1 x(x^4 - 2x^2 + 2 - 1)\, dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x(x^2-1)^2\, dx = \frac{\pi}{3}\Big[(x^2-1)^3\Big]_0^1 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Lösning till problem 8: Vi finner att

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - (1 - x^2/2 + O(x^4))}{x^2} = \frac{1}{2} + O(x^2).$$

Alltså gäller $f(x) \to 1/2$ då $x \to 0$. Om vi definierar $f(0) = 1/2$ så blir f kontinuerlig i $x = 0$ per definition. Nu vill vi undersöka derivatan i origo. Först fås för $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\frac{1-\cos x}{x^2} - \frac{1}{2}}{x} = \frac{2(1-\cos x) - x^2}{2x^3} \\ &= \frac{2\Big(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\Big) - x^2}{2x^3} = -\frac{x}{4!} + O(x^3) \to 0 \end{aligned}$$

då $x \to 0$. Detta visar att $f'(0) = 0$. För att avgöra om f' är kontinuerlig i $x = 0$ räcker det att visa att $f'(x) \to f'(0)$ då $x \to 0$. Men för $x \neq 0$ är

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 \sin x - 2x(1 - \cos x)}{x^4} = \frac{x \sin x - 2(1 - \cos x)}{x^3} \\ &= \frac{x(x - O(x^3)) - 2(x^2/2! + O(x^4))}{x^3} = \frac{O(x^4)}{x^3} = O(x) \end{aligned}$$

Vi ser att $f'(x) \to 0 = f'(0)$ då $x \to 0$, dvs f' är kontinuerlig i $x = 0$.